Ухоботов Виктор Иванович

Родился 1 января 1946 г. Окончил механико-математический факультет Московского государственного университета в 1970 г. В 1973 г. окончил аспирантуру отделения механики механико-математического факультета Московского государственного университета. Кандидат физико-математических наук (1974), доктор физико-математических наук (1997). Профессор, заведующий кафедрой теории управления и оптимизации Челябинского государственного университета. Заслуженный работник высшей школы РФ.

Область научных интересов: дифференциальные игры и задачи управления при наличии воздействия со стороны неконтролируемых помех; вопросы принятия решений в условиях неопределенности.

Издательство
Челябинского государственного университета

В. И. Ухоботов Введение в теорию принятия решений при неопределённостях

Челябинский государственный университет

КЛАССИЧЕСКОЕ
УНИВЕРСИТЕТСКОЕ
ОБРАЗОВАНИЕ

В. И. Ухоботов

ВВЕДЕНИЕ В ТЕОРИЮ ПРИНЯТИЯ РЕШЕНИЙ ПРИ НЕОПРЕДЕЛЁННОСТЯХ

Учебное пособие

Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего профессионального образования
«Челябинский государственный университет»

КЛАССИЧЕСКОЕ УНИВЕРСИТЕТСКОЕ ОБРАЗОВАНИЕ

В. И. Ухоботов

ВВЕДЕНИЕ В ТЕОРИЮ ПРИНЯТИЯ РЕШЕНИЙ ПРИ НЕОПРЕДЕЛЁННОСТЯХ

Учебное пособие

Челябинск
Издательство Челябинского государственного университета
2015

ББК В183я7
У895

Серия основана в 2008 году

Печатается по решению редакционно-издательского совета
Челябинского государственного университета

Рецензенты:
кафедра вычислительной математики
Южно-Уральского государственного университета;
В. М. Ситников, кандидат физико-математических наук,
доцент кафедры математики и методики обучения математики
Челябинского государственного педагогического университета

Ухоботов, В. И.
У895 Введение в теорию принятия решений при неопределённостях : учеб. пособие / В. И. Ухоботов. Челябинск : Изд-во Челяб. гос. ун-та, 2015. 138 с. (Классическое университетское образование).
ISBN 978-5-7271-1308-0

В издании рассматриваются математические модели принятия решений при условии наличия неопределённых факторов. Приводятся модели принятия решений при наличии пассивной неопределённости, в случаях, когда неопределённость является случайной величиной, а также в условиях конфликта.

Пособие предназначено для аспирантов, занимающихся вопросами построения математических моделей в условиях неполной информации, бакалаврам и магистрантам, обучающимся по направлениям «Прикладная математика и информатика», «Математика и компьютерные науки», «Фундаментальная информатика и информационные технологии», «Экономика», «Менеджмент».

ББК В183я73-1

ISBN 978-5-7271-1308-0

Оглавление

Введение

В предлагаемом учебном пособии рассматриваются математические модели принятия решений при наличии неопределённостей. Такие задачи возникают при рассмотрении многих экономических и управленческих проблем. В пособии разбираются три типа неопределённостей.

В случае пассивной неопределённости известна только область возможных её значений. Для этого рассмотрены критерии Вальда, Сэвиджа, Лапласа, «крайнего оптимизма», Гурвица и Ходжа — Лемана. Применение этих критериев иллюстрируется при решении конкретных задач, по результатам которых даётся сравнительный анализ применения этих критериев. Приведены примеры, когда по всем критериям получается одинаковое решение.

Одной из проблем в задачах принятия решений является уменьшение степени риска. В пособии рассмотрен метод применения смешанных стратегий как способ уменьшения риска. На конкретных примерах иллюстрируется смысл смешанных стратегий. Даётся сравнение меры риска при применении чистых и смешанных стратегий.

Рассмотрены многокритериальные задачи принятия решения. Вначале они расцениваются как задачи с помехами, где в качестве пассивной помехи выступает номер целевой функции. Показывается, что решение, получаемое путём применения изложенных выше критериев, является оптимальным по Слейтеру. В дальнейшем изложении в качестве основных принципов оптимальности рассматриваются оптимальности по Слейтеру и по Парето. В пособии не разбираются многокритериальные задачи при наличии пассивных помех. Материал по ним можно найти, например, в монографии [6].

Для случайной помехи с известными параметрами распределения задача принятия решения рассматривается в качестве двухкритериальной с максимизацией математического ожидания и минимизацией дисперсии. Рассматриваются критерии математического ожидания и критерий математического ожидания — дисперсии. Рассмотрены конкретные примеры применения этих критериев.

Для задач принятия решения в условиях конфликта применяются математические модели теории игр. В пособии показаны как антагонистические игры двух лиц, так и игры многих лиц в нормальной форме. Для антагонистических выпукло-вогнутых игр доказывается теорема существования седловой точки. В случае матричных игр доказывается существование седловой точки в смешанных стратегиях. Излагаются способы нахождения седловой точки в матричных играх.

Для игр многих лиц в нормальной форме в качестве основных принципов оптимальности рассматриваются оптимальности по Парето и по Нэшу. Доказывается теорема существования точки равновесия по Нэшу. Излагается арбитражная схема Нэша. Подробно рассмотрены биматричные игры второго порядка.

Рассмотрены многошаговые позиционные игры с полной и неполной информацией. Даётся решение содержательных примеров.

В пособии приведены задачи, самостоятельное решение которых позволит лучше усвоить изучаемый материал.

Список литературы, материал из которой был использован при написании пособия, приведён в конце. Для знакомства с математической теорией игр и её серьёзного изучения можно предложить список литературы, приведённый в [3]. Рекомендуемое учебное пособие будет полезным и при подборке задач, и для решения их с целью усвоения теоретического материала.

1. Принципы выбора стратегий в условиях воздействия со стороны неопределённых пассивных помех

Рассмотрим пример, иллюстрирующий ситуацию, когда необходимо принимать решения в условиях воздействия со стороны неконтролируемых факторов.

Пример 1 (задача о вкладе по двум депозитам). Вкладчик, имея сумму денег, равную N рублей, может положить её в банк на рублёвый вклад под $r \cdot 100$ % годовых (стратегия $x = x_1$), или на валютный вклад под $d \cdot 100$ % годовых (стратегия $x = x_2$). Через год на рублёвом вкладе окажется сумма, равная $R = (1 + r)N$. Сумма, которая окажется на валютном вкладе через год, равна $(1+d)\frac{N}{K_0}$ долларов. Переведя эту сумму в рубли по курсу K_1, вкладчик будет иметь в рублях сумму, равную Dy, где $D = (1 + d)N$ и $y = \frac{K_1}{K_0}$.

Таким образом, сумма, которую получит вкладчик при выборе им стратегии x, равна

$$f(x,y) = \begin{cases} R \text{ при } x = x_1, \\ Dy \text{ при } x = x_2 \end{cases} = D \begin{cases} R/D \text{ при } x = x_1, \\ y \text{ при } x = x_2. \end{cases}$$

Допустим, что значение числа y известно.

В этом случае оптимальная стратегия вкладчика ищется из условия

$$\max_{x=x_1,x_2} f(x,y) = \max(R; Dy) = D \max\left(\frac{R}{D}; y\right).$$

Следовательно,

$$x_{\text{опт}} = \begin{cases} x_1 \text{ при } a \le y \le R/D, \\ x_2 \text{ при } R/D \le y \le b. \end{cases}$$

Число R/D равно такому отношению курсов доллара, при котором суммы от рублёвого и долларового вкладов одинаковы.

В общем случае будущий курс доллара K_1 и, следовательно, число y заранее неизвестны, поэтому число y является неопределённостью. Может быть только известен коридор значений этой неопределённости. Тогда возможные значения величины $y \in [a,b]$.

Если $R/D \ge b$, то $R \ge Dy$ при всех $a \le y \le b$. Следовательно, выполнено неравенство $f(x_1,y) \ge f(x_2,y)$ при любом $y \in [a,b]$. Это значит, что при любом $y \in [a,b]$ рублёвый вклад даёт лучший результат. Если

$R/D \le a$, то $R \le Dy$ при всех $a \le y \le b$. Следовательно, выполнено неравенство $f(x_1,y) \le f(x_2,y)$ при любом $y \in [a,b]$. Это значит, что при любом $y \in [a,b]$ долларовый вклад даёт лучший результат. Далее, рассматриваем случай, когда $a < R/D < b$. Графики функций $f(x_i,y)$ изображены на рис. 1.1.

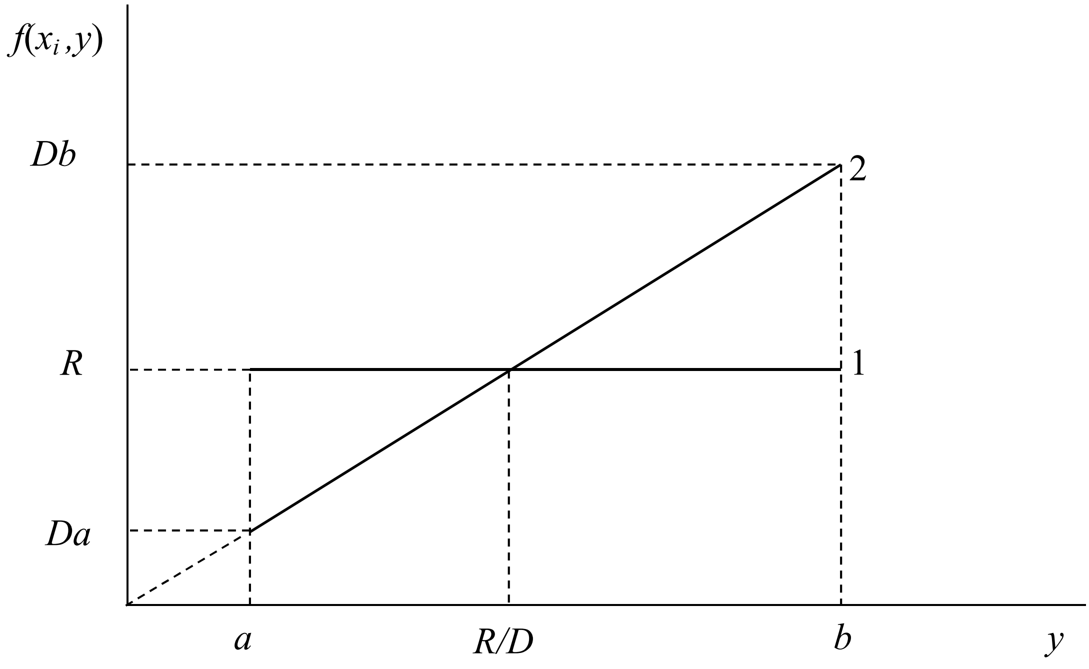

Рис. 1.1

В общей постановке рассматривается однокритериальная задача принятия решений при неопределённости, в которой выбор элемента (стратегии) x из множества X находится в распоряжении лица, принимающего решение (ЛПР). Роль ЛПР может выполнять, например, руководитель предприятия, фирмы, банка, а также менеджер, продавец. Существуют ещё неконтролируемые факторы y (ошибки, помехи или другие неопределённости), о которых известно, что они содержатся в заданном множестве Y, а какова будет их конкретная реализация после выбора ЛПР стратегии $x \in X$ неизвестно. Задана функция $f: X \times Y \to R$. Цель ЛПР заключается в том, чтобы путём выбора стратегии $x \in X$ сделать значение критерия $f(x,y)$ как можно больше. Возникает вопрос о правиле выбора стратегии x.

По мироощущению ЛПР располагаются от крайних пессимистов до крайних оптимистов. Существует такое высказывание: «Оптимист видит возможность в каждом затруднении, а пессимист — затруднение в каждой возможности». Это нашло отражение в наборе разработанных критериев принятия решений в условиях неопределённости.

Критерий Вальда (принцип наилучшего гарантированного результата или принцип максимина). Предполагается, что для каждой стратегии $x \in X$, выбранной ЛПР, реализуется наиболее плохой для ЛПР неконтролируемый фактор $y \in Y$. Тогда при конкретном выборе $x \in X$ реализуется следующее значение критерия:

$$F_{\text{В}}(x) = \min_{y \in Y} f(x, y). \tag{1.1}$$

Согласно критерию Вальда, решение x_1 выбирается из условия

$$F_{\text{В}}(x_{\text{В}}) = \max_{x \in X} F_{\text{В}}(x). \tag{1.2}$$

Такая оценка выбранной стратегии называется *оценкой крайнего пессимизма*, она ориентирует ЛПР на реализацию самой плохой для него неопределённости. Эта стратегия полностью исключает риск. Это значит, что ЛПР не может столкнуться с результатом, который хуже того, на что он ориентируется.

Замечание 1. В газете «Комсомольская правда» в статье «Экономисты растерялись перед лицом кризиса» гендиректор «Роснано» А. Чубайс говорит: «Я не знаю, что делать с мировой экономикой, но я знаю, что делать в России: пересчитать бюджет на 2009 г., исходя из максимально пессимистического варианта макроэкономического прогноза. Иными словами, если цена на нефть прогнозируется в диапазоне 25–50 долларов за баррель, то готовиться надо к 25 долларам. Лучше потом получить дополнительные доходы, чем недосчитать прибыли в казну» (http://www.kp.ru/daily/24239.3/438224).

Критерий Вальда может применяться тогда, когда ситуация, в которой принимается решение, характеризуется следующими обстоятельствами:

– о вероятности появления неопределённости y ничего не известно;
– с появлением неопределённости y необходимо считаться;
– реализуется лишь малое количество принятия решения;
– всякий риск исключается.

Чтобы обосновать подход выбора стратегии $x_{\text{В}}$ из условия (1.2) будем считать, что выполнено следующее предположение.

Предположение 1. Каждое из множеств X и Y является компактом в соответствующем метрическом пространстве, а функция f: $X \times Y \to$ $\to R$ — непрерывной.

Тогда, согласно теореме Вейрштасса, определены функции

$$F_{+}(x) = \min_{y \in Y} f(x, y), \quad F^{+}(y) = \max_{x \in x} f(x, y). \tag{1.3}$$

Теорема 1. Пусть выполнено предположение 1. Тогда функции (1.3) являются непрерывными.

Доказательство. Рассмотрим функцию $F_+(x)$. Возьмём из множества X последовательность точек $x_n \to x_*$. По теореме Вейрштрасса для каждого номера $n \geq 1$ существует точка $y_n \in Y$ такая, что $F_+(x_n) = f(x_n, y_n)$.

Покажем, что $F_+(x_n) \to F_+(x_*)$. Допустим противное. Тогда найдётся подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$ этой последовательности, у которой $F_+(x_{n_k}) \to A$ и $A \neq F_+(x_*)$. Рассмотрим подпоследовательность $\{y_{n_k}\}$ точек $y_n \in Y$, в которых выполнены равенства $F_+(x_{n_k}) = f(x_{n_k}, y_{n_k})$. Поскольку множество Y является компактом, то можно считать, что $y_{n_k} \to y_* \in Y$ (иначе перейдём к сходящейся подпоследовательности). Для любого $y \in Y$ выполнено неравенство $F_+(x_{n_k}) = f(x_{n_k}, y_{n_k}) \leq f(x_{n_k}, y)$. Перейдём в этом неравенстве к пределу и используем непрерывность функции $f(x,y)$. Получим неравенство $f(x_*,y_*) \leq f(x_*,y)$. Следовательно, $F_+(x_*) = f(x_*, y_*)$. Далее,

$$A = \lim_{n_k \to \infty} F_+(x_{n_k}) = \lim_{n_k \to \infty} f(x_{n_k}, y_{n_k}) = f(x_*, y_*) = F_+(x_*).$$

Получили противоречие.

Далее, функция

$$F(y) = -F^+(y) = -\max_{x \in X} f(x,y) = \min_{x \in X}(-f(x,y))$$

является непрерывной на множестве Y. Поэтому функция $F^+(y)$ является непрерывной на множестве Y.

Согласно доказанной теореме, если выполнено предположение 1, то функция $F_1(x)$ является непрерывной. Поэтому её максимальное значение на множестве X достигается в некоторой точке $x_В \in X$.

Пример 2. Найдём решение задачи о вкладе с помощью критерия Вальда, то есть с позиции крайнего пессимиста.

Имеем

$$F_В(x) = \min_{a \leq y \leq b} \begin{cases} R & \text{при } x = x_1, \\ Dy & \text{при } x = x_2 \end{cases} = \begin{cases} R & \text{при } x = x_1, \\ Da & \text{при } x = x_2. \end{cases}$$

Следовательно,

$$F_В(x_В) = \max_{x = x_1, x_2} \begin{cases} R & \text{при } x = x_1, \\ Da & \text{при } x = x_2 \end{cases} = D \max\left(\frac{R}{D}; a\right) = R.$$

Поскольку рассматриваем случай $a < R/D < b$, то $x_В = x_1$, то есть нужно выбирать рублёвый вклад.

Обычно наихудшая для ЛПР неопределённость маловероятна. Поэтому американский математик и статистик Сэвидж в 1951 г. предложил в качестве усовершенствования максиминного критерия принцип минимаксного риска. В представленном критерии отражено возможное сожаление ЛПР о принятом им решении после того, как становится известным конкретная реализация неконтролируемого фактора.

Замечание 2. Вот как описывает такое сожаление А. П. Чехов в своём произведении «Степь (история одной поездки)»:

«Кузмичов же не казался довольным. Лицо его по-прежнему выражало деловую сухость и заботу.

Эх, кабы знатьё, что Черепахин даёт такую цену, говорил он вполголоса, — то я б дома не продавал Макарову тех трёхсот пудов! Такая досада! Но кто же его знал, что тут цену подняли!»

Критерий Сэвиджа (принцип минимаксного риска или принцип минимаксного сожаления). Для каждой неопределённости $y \in Y$ ЛПР определяет наибольшее значение критерия — $\max\limits_{z \in X} f(z, y)$. Разность

$$\varphi(x, y) = \max_{z \in X} f(z, y) - f(x, y) \tag{1.4}$$

выражает «сожаление» ЛПР о том, что для неопределённого фактора $y \in Y$ он использует стратегию x, а не более хорошую стратегию x_*, для которой

$$f(x_*, y) = \max_{z \in X} f(z, y).$$

Затем ЛПР стремится выбрать такую стратегию $x \in X$, при которой максимально возможное сожаление будет наименьшим. Для этого составляется функция

$$F_{\text{С}}(x) = \max_{y \in Y} \varphi(x, y). \tag{1.5}$$

Согласно критерию Сэвиджа, стратегия $x_{\text{С}}$ выбирается из условия

$$F_{\text{С}}(x_{\text{С}}) = \min_{x \in X} F_2(x). \tag{1.6}$$

Отметим, что из теоремы 1 следует непрерывность функций $\varphi(x,y)$ и $F_{\text{С}}(x)$.

Замечание 3. Функция (1.4) характеризует риск ЛПР и называется *функцией риска ЛПР*. Риск возникает в связи с тем, что ЛПР не знает точно, какая неопределённость будет реализована.

Пример 3. Найдём решение задачи о вкладе с помощью критерия Сэвиджа. Формула (1.4) в рассматриваемом примере принимает вид

$$\varphi(x,y)=\max_{z=x_1,x_2}\begin{cases}R & \text{при } z=x_1,\\ Dy & \text{при } z=x_2\end{cases}-\begin{cases}R & \text{при } x=x_1,\\ Dy & \text{при } x=x_2\end{cases}=$$

$$=\max(R;Dy)-\begin{cases}R & \text{при } x=x_1,\\ Dy & \text{при } x=x_2.\end{cases}$$

Отсюда следует, что

$$\varphi(x,y)=\begin{cases}\max(0;Dy-R) & \text{при } x=x_1,\\ \max(0;R-Dy) & \text{при } x=x_2\end{cases}=$$

$$=D\begin{cases}\max(0;y-R/D) & \text{при } x=x_1,\\ \max(0;R/D-y) & \text{при } x=x_2.\end{cases}$$

Графики функций $\varphi(x_i,y)$ изображены на рис. 1.2. Функция (1.5) равна

$$F_C(x)=D\max_{a\le y\le b}\begin{cases}\max(0;y-R/D) & \text{при } x=x_1,\\ \max(0;R/D-y) & \text{при } x=x_2\end{cases}=D\begin{cases}b-R/D & \text{при } x=x_1,\\ R/D-a & \text{при } x=x_2.\end{cases}$$

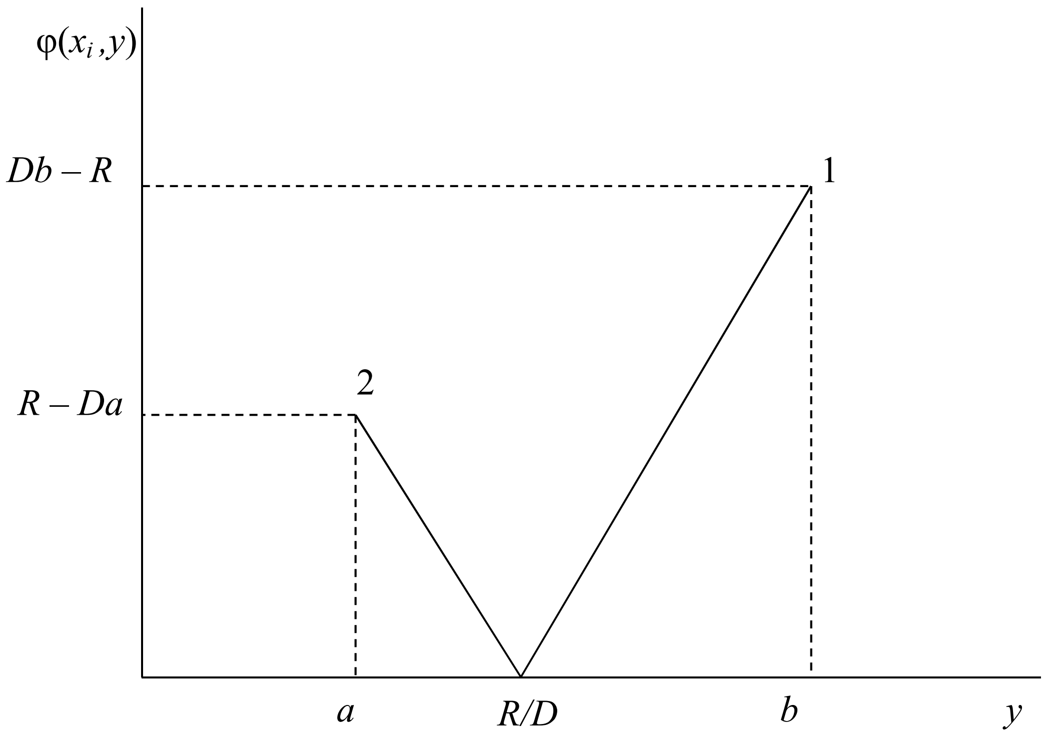

Рис. 1.2

Поэтому из формулы (1.6) будем иметь

$$F_C(x_C)=\min_{x=x_1,x_2}F_C(x)=D\min(b-R/D;R/D-a),$$

$$x_{\text{С}} = \begin{cases} x_1, \text{если } b - R/D \le R/D - a, \\ x_2, \text{если } b - R/D \ge R/D - a \end{cases} = \begin{cases} x_1, \text{если} \dfrac{1}{2} \le \dfrac{R/D - a}{b - a}, \\ x_2, \text{если} \dfrac{1}{2} \ge \dfrac{R/D - a}{b - a}. \end{cases}$$

Величина $\dfrac{R/D - a}{b - a}$ задаёт долю возможных значений y, находящихся левее числа R/D, или, что эквивалентно, долю тех возможных значений y, для которых рублёвый вклад даёт большее накопление.

Утверждение 1. Если $\max\limits_{z \in X} f(z, y) = f_* = \text{const}$, то каждая оптимальная по Сэвиджу стратегия будет являться оптимальной по Вальду, и наоборот.

Доказательство. В самом деле, из формул (1.1), (1.4) и (1.5) получим, что

$$F_{\text{С}}(x) = f_* - \min_{y \in Y} f(x, y) = f_* - F_B(x).$$

Отсюда следует совпадение множеств оптимальных стратегий по Сэвиджу и Вальду.

Замечание 4. При любой известной неопределённости $y \in Y$ ЛПР может сделать величину риска, равной нулю. В самом деле,

$$\min_{x \in X} \varphi(x, y) = \min_{x \in X}(\max_{z \in X} f(z, y) - f(x, y)) = \max_{z \in X} f(z, y) +$$
$$+ \min_{x \in X}(-f(x, y)) = \max_{z \in X} f(z, y) - \max_{z \in X} f(z, y) = 0.$$

Критерий Лапласа. Этот критерий основан на следующем принципе недостаточного обоснования: поскольку распределение вероятности на неопределённых факторах заранее неизвестно, то принимаем, что распределение является равномерным. Иначе бы мы имели какую-нибудь информацию о неравномерном законе распределения.

По критерию Лапласа стратегия $x \in X$ оценивается числом

$$F_{\text{Л}}(x) = \int_Y f(x, y) p(y) dy, \tag{1.7}$$

где $p(y)$ — плотность равномерного распределения на множестве Y. Стратегия x_3 выбирается из условия

$$F_{\text{Л}}(x_{\text{Л}}) = \max_{x \in X} F_{\text{Л}}(x). \tag{1.8}$$

Пример 4. Найдём решение в примере о вкладе, опираясь на критерий Лапласа. Плотность $p(y)$ равномерного распределения на отрезке $[a,b]$ равна $(b - a)^{-1}$ при $y \in [a,b]$ и $p(y) = 0$, если $y \notin [a,b]$. Поэтому из формулы (1.7) получим

$$F_{\text{Л}}(x) = \frac{1}{b-a}\int_a^b \begin{cases} R, \text{ если } x = x_1, \\ Dy, \text{ если } x = x_2 \end{cases} dy = D\begin{cases} R/D, \text{ если } x = x_1, \\ (a+b)/2, \text{ если } x = x_2. \end{cases}$$

Отсюда и из (1.8) имеем

$$x_{\text{Л}} = \begin{cases} x_1, \text{ если } \dfrac{1}{2} \le \dfrac{R/D-a}{b-a}, \\ x_2, \text{ если } \dfrac{1}{2} \ge \dfrac{R/D-a}{b-a} \end{cases} = \begin{cases} x_1, \text{ если } \dfrac{R}{D} \ge \dfrac{a+b}{2}, \\ x_2, \text{ если } \dfrac{R}{D} \le \dfrac{a+b}{2}, \end{cases}$$

$$F_{\text{Л}}(x_{\text{Л}}) = D\max\left(\frac{R}{D}; \frac{a+b}{2}\right).$$

Стало быть, оптимальное решение по критерию Лапласа совпадает с оптимальным решением по критерию Сэвиджа.

Критерий «крайнего оптимизма». Критерий «крайнего оптимизма» исходит из того, что для каждой стратегии $x \in X$, выбранной ЛПР, реализуется наиболее хороший для него неконтролируемый фактор $y \in Y$. Тогда при конкретной стратегии $x \in X$ реализуется следующее значение критерия:

$$F_{\text{О}}(x) = \max_{y \in Y} f(x, y). \tag{1.9}$$

Стратегия $x_{\text{О}}$ выбирается из условия

$$F_{\text{О}}(x_{\text{О}}) = \max_{x \in X} F_{\text{О}}(x). \tag{1.10}$$

Пример 5. Вычислим решение задачи о вкладе, применяя критерий «крайнего оптимизма». Из формулы (1.9) имеем

$$F_{\text{О}}(x) = \max_{a \le y \le b}\begin{cases} R \text{ при } x = x_1, \\ Dy \text{ при } x = x_2 \end{cases} = \begin{cases} R \text{ при } x = x_1, \\ Db \text{ при } x = x_2. \end{cases}$$

Поскольку рассматривается случай $a < R/D < b$, то, согласно (1.10), $x_{\text{О}} = x_2$.

Критерий Гурвица. Из формул (1.1) и (1.9) следует, что при любой выбранной ЛПР стратегии $x \in X$ и при любом реализовавшемся факторе $y \in Y$ выполнено включение $f(x,y) \in [F_{\text{В}}(x), F_{\text{О}}(x)]$. Поэтому выбор стратегии $x \in X$ можно производить с помощью сравнения отрезков $[F_{\text{В}}(x), F_{\text{О}}(x)]$.

В начале рассмотрим задачу сравнения двух отрезков $[g_i; G_i]$, $i = 1,2$. С этой целью рассмотрим на плоскости $(z_1; z_2)$ множества

$$S_1 = \{(z_1; z_2)\colon z_1 \in [g_1; G_1],\ z_2 \in [g_2; G_2],\ z_1 \ge z_2\};$$
$$S_2 = \{(z_1; z_2)\colon z_1 \in [g_1; G_1],\ z_2 \in [g_2; G_2],\ z_1 \le z_2\}.$$

На рис. 1.3 множество S_1 является многоугольником $KNCDA$, а множество S_2 — треугольником KBN.

Определение 1. Будем говорить, что отрезок $[g_1;G_1]$ *не хуже* отрезка $[g_2;G_2]$, если площадь множества S_1 не меньше площади множества S_2.

Этим определением мы формализуем тот факт, что число пар $(z_1;z_2)$ чисел $z_1 \in [g_1;G_1]$ и $z_2 \in [g_2;G_2]$, у которых $z_1 \geq z_2$, *больше*, чем число пар, у которых $z_1 \leq z_2$. Поэтому отрезок $[g_1;G_1]$ предпочтительней отрезка $[g_2;G_2]$.

Утверждение 1. Площадь множества S_1 больше или равна площади множества S_2 тогда и только тогда, когда

$$\frac{1}{2}g_1 + \frac{1}{2}G_1 \geq \frac{1}{2}g_2 + \frac{1}{2}G_2.$$

Доказательство. Как видно из рис. 1.3, площадь множества S_1 больше или равна площади множества S_2 тогда и только тогда, когда точка M с координатами $z_1 = \frac{1}{2}g_1 + \frac{1}{2}G_1$, $z_2 = \frac{1}{2}g_2 + \frac{1}{2}G_2$ лежит ниже прямой $z_1 = z_2$. На рис. 1.3 это прямая, которая проходит через начало координат и точку N. Далее, неравенство $\frac{1}{2}g_1 + \frac{1}{2}G_1 \geq \frac{1}{2}g_2 + \frac{1}{2}G_2$ выполнено тогда и только тогда, когда точка M лежит ниже прямой $z_1 = z_2$. Если точка M лежит ниже прямой $z_1 = z_2$, то параллельная ей прямая FP, проходящая через точку M, делит прямоугольник $ABCD$ на две части с одинаковыми площадями. В этом случае, как видно из рис. 1.3, площадь множества S_1 больше или равна площади множества S_2.

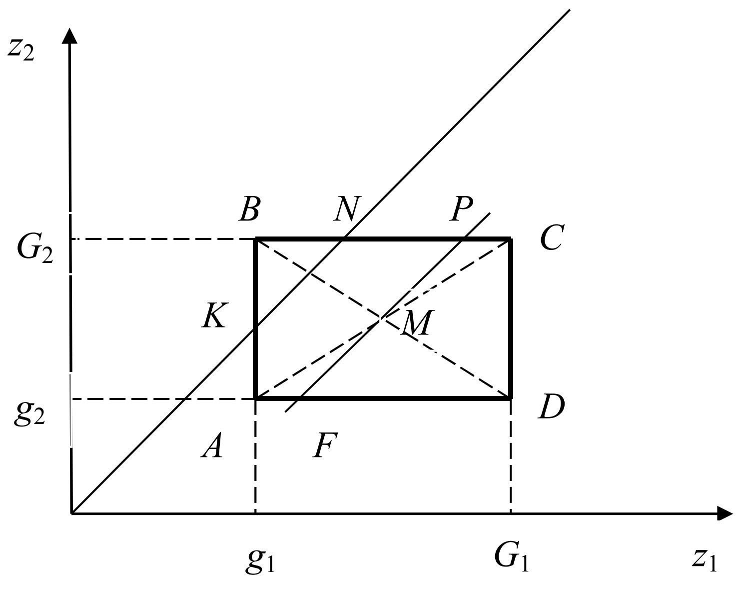

Рис. 1.3

В соответствии с изложенным подходом приходим к задаче о нахождении максимального значения функции $\frac{1}{2}F_{\text{О}}(x)+\frac{1}{2}F_{\text{В}}(x)$ при $x \in X$.

Критерий Гурвица обобщает этот подход. Выбирается число $0 \le \nu \le 1$ и строится функция

$$F_{\Gamma}(x)=\nu F_{\text{О}}(x)+(1-\nu)F_{\text{В}}(x). \qquad (1.11)$$

Стратегия x_{Γ} выбирается из условия

$$F_{\Gamma}(x_{\Gamma})=\max_{x\in X}F_{\Gamma}(x). \qquad (1.12)$$

Параметр ν называется *показателем оптимизма.* При $\nu = 1$ получаем критерий крайнего оптимизма, а при $\nu = 0$ — критерий крайнего пессимизма. Поскольку в практических приложениях трудно выбрать численные значения показателя оптимизма, то чаще всего берут $\nu = 0{,}5$.

Пример 6. Вычислим решение задачи о вкладе, применяя критерий Гурвица. Формула (1.11) принимает вид

$$F_{\Gamma}(x)=\nu\begin{cases}R \text{ при } x=x_1,\\ Db \text{ при } x=x_2\end{cases}+(1-\nu)\begin{cases}R \text{ при } x=x_1,\\ Da \text{ при } x=x_2\end{cases}=$$

$$=\begin{cases}R \text{ при } x=x_1,\\ D(\nu b+(1-\nu)a) \text{ при } x=x_2.\end{cases}$$

Поэтому, согласно (1.12),

$$F_{\Gamma}(x_{\Gamma})=D\max(R/D;\nu b+(1-\nu)a),$$

$$x_{\Gamma}=\begin{cases}x_1, \text{ если } \nu b+(1-\nu)a\le R/D,\\ x_2, \text{ если } \nu b+(1-\nu)a\ge R/D\end{cases}=\begin{cases}x_1, \text{ если } 0\le\nu\le\dfrac{R/D-a}{b-a},\\ x_2, \text{ если } \nu\ge\dfrac{R/D-a}{b-a}.\end{cases}$$

Таким образом, если показатель оптимизма ν вкладчика не превышает доли возможных значений y, находящихся левее числа R/D, то он выбирает рублёвый вклад. Это равносильно тому, что если показатель оптимизма ν вкладчика не превышает доли возможных значений y, для которых рублёвый вклад даёт большее накопление, то вкладчик выбирает рублёвый вклад. В противном случае он выбирает долларовый вклад.

Критерий Гурвица предъявляет к ситуации, в которой принимается решение, следующие требования:

– о вероятности появления неопределённости y ничего не известно;

– с появлением неопределённости y необходимо считаться;

– реализуется лишь малое количество принятия решения;

– допускается некоторый риск.

Критерий Ходжа — Лемана. Выбирается число $0 \le \nu \le 1$ и строится функция

$$F_{\text{Х-Л}}(x) = nF_{\text{Л}}(x) + (1-\nu)F_{\text{В}}(x). \tag{1.13}$$

Стратегия $x_{\text{Х-Л}}$ выбирается из условия

$$F_{\text{Х-Л}}(x_{\text{Х-Л}}) = \max_{x \in X} F_{\text{Х-Л}}(x). \tag{1.14}$$

При $\nu = 1$ получаем критерий Лапласа, а при $\nu = 0$ — критерий крайнего пессимизма.

Пример 7. Найдём решение в примере о вкладе, используя критерий Ходжа — Лемана. Из формулы (1.13) имеем, что

$$F_{\text{Х-Л}}(x) = \nu \begin{cases} R \text{ при } x = x_1, \\ D\dfrac{a+b}{2} \text{ при } x = x_2 \end{cases} + (1-\nu)\begin{cases} R \text{ при } x = x_1, \\ Da \text{ при } x = x_2. \end{cases}$$

Следовательно,

$$F_{\text{Х-Л}}(x) = \begin{cases} R \text{ при } x = x_1, \\ D\left(\left(1 - \dfrac{\nu}{2}\right)a + \dfrac{\nu}{2}b\right) \text{ при } x = x_2. \end{cases}$$

Отсюда и из (1.14) получим, что

$$x_{\text{Х-Л}} = \begin{cases} x_1, \text{ если } 0 \le \nu \le 2\dfrac{R/D - a}{b-a}, \\ x_2, \text{ если } 2\dfrac{R/D-a}{b-a} \le \nu \le 1; \end{cases}$$

$$F_{\text{Х-Л}}(x_{\text{Х-Л}}) = D\max\left(\frac{R}{D}; \left(1-\frac{\nu}{2}\right)a + \frac{\nu}{2}b\right).$$

Критерий Ходжа — Лемана предъявляет к ситуации, в которой принимается решение, следующие требования:

– о вероятности появления неопределённости y ничего не известно, но предположение о равномерном распределении имеется;

– принятое решение теоретически допускает бесконечно большое количество реализаций;

– допускается некоторый риск при малых числах реализаций.

Выпишем разобранные выше критерии принятия решения для случая, когда ЛПР минимизирует значение $f(x,y)$.

Критерий Вальда. Стратегия $x_{\text{В}}$ выбирается из условия

$$F_{\text{В}}(x_{\text{В}}) = \min_{x \in X} F_{\text{В}}(x), \quad \text{где} \quad F_{\text{В}}(x) = \max_{y \in Y} f(x, y). \tag{1.15}$$

Критерий Сэвиджа. Функция сожаления имеет следующий вид:

$$\varphi(x, y) = f(x, y) - \min_{z \in X} f(z, y). \tag{1.16}$$

Стратегия $x_{\text{С}}$ выбирается из условия

$$F_{\text{С}}(x_{\text{С}}) = \min_{x \in X} F_{\text{С}}(x), \quad \text{где} \quad F_{\text{С}}(x) = \max_{y \in Y} \varphi(x, y). \tag{1.17}$$

Замечание 5. Как и в утверждении 1, если величина $\min\limits_{z \in X} f(z,y)$ является постоянной, то каждая оптимальная по Сэвиджу стратегия будет являться оптимальной по Вальду, и наоборот.

Критерий Лапласа. Стратегия $x_{\text{Л}}$ выбирается из условия

$$F_{\text{Л}}(x_{\text{Л}}) = \min_{x \in X} F_{\text{Л}}(x), \quad \text{где} \quad F_{\text{Л}}(x) = \int_Y f(x, y) p(y) dy. \tag{1.18}$$

Здесь $p(y)$ — плотность равномерного распределения на множестве Y.

Критерий «крайнего оптимизма». Стратегия $x_{\text{О}}$ выбирается из условия

$$F_{\text{О}}(x_{\text{О}}) = \min_{x \in X} F_{\text{О}}(x), \quad \text{где} \; F_{\text{О}}(x) = \min_{y \in Y} f(x, y). \tag{1.19}$$

Критерий Гурвица. Выбирается число $0 \le \nu \le 1$. Стратегия $x_{\text{Г}}$ выбирается из условия

$$F_{\text{Г}}(x_{\text{Г}}) = \min_{x \in X} F_{\text{Г}}(x), \quad \text{где} \; F_{\text{Г}}(x) = \nu F_{\text{О}}(x) + (1 - \nu) F_{\text{В}}(x). \tag{1.20}$$

Критерий Ходжа — Лемана. Выбирается число $0 \le \nu \le 1$. Стратегия $x_{\text{Х-Л}}$ выбирается из условия

$$F_{\text{Х-Л}}(x_{\text{Х-Л}}) = \min_{x \in X} F_{\text{Х-Л}}(x), \quad \text{где} \; F_{\text{Х-Л}}(x) = \nu F_{\text{Л}}(x) + (1 - \nu) F_{B}(x). \tag{1.21}$$

2. Решение задачи о коммерсанте

Пример 1. Представитель малого бизнеса берёт в банке кредит на сумму x денежных единиц и отправляется за товарами в другую страну, где он может приобрести товара на сумму $y \in [a,b]$ денежных единиц. Здесь числа a и b заданы. Возвращаясь назад, он реализует на рынке весь купленный товар по более высоким ценам.

При этом у коммерсанта всегда присутствует риск. Если он возьмёт в банке сумму с излишком, то может приобрести товара не на всю взятую сумму денег и, следовательно, выплатит проценты банку за неиспользуемые взятые деньги. Если же он возьмёт меньшую сумму денег, чем ту, на которую бы он смог приобрести товара, то риск определяется неиспользованной возможностью. В качестве функции «штрафа» возьмём

$$f(x,y) = \begin{cases} c_1(x-y) \text{ при } 0 \le y \le x, \\ c_2(y-x) \text{ при } y \ge x. \end{cases} \tag{2.1}$$

Здесь $x \ge 0$, $y \in [a,b]$, $c_1 > 0$, $c_2 > 0$ — некоторые коэффициенты, определяемые процентной кредитной ставкой банка и разницей цен в странах на приобретаемые товары. Естественно ожидать, что коммерсант стремится взять в банке такую сумму, чтобы значение функции штрафа было как можно меньше. Эта задача легко решается, если известно, на какую сумму денег $y \in [a,b]$ он может приобрести товара. Однако эта величина заранее может быть неизвестной. Приходим к задаче о выборе числа $x \ge 0$ при заранее неизвестном числе $y \in [a,b]$.

Решение примера 1. Пусть применяется *критерий Вальда*. Тогда из формулы (1.1) и (1.15) из первого параграфа получим, что функция

$$F_{\text{В}}(x) = \max_{a \le y \le b} \begin{cases} c_1(x-y) \text{ при } 0 \le y \le x, \\ c_2(y-x) \text{ при } y \ge x \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} c_2(b-x) \text{ при } 0 \le x \le a, \\ \max(c_1(x-a); c_2(b-x)) \text{ при } a \le x \le b, \\ c_1(x-a) \text{ при } b \le x. \end{cases} \tag{2.2}$$

График функции $F = F_{\text{В}}(x)$ приведён на рис. 2.1.

Из равенства $c_2(b-x) = c_1(x-a)$ найдём точку

$$x^* = \frac{c_1}{c_1+c_2}a + \frac{c_2}{c_1+c_2}b. \tag{2.3}$$

Из формулы (2.3) видно, что $F_{\text{В}}(x) = c_2(b-x)$ при $0 \le x \le x^*$ и $F_{\text{В}}(x) = c_1(x-a)$ при $x^* \le x$. Следовательно, функция $F_{\text{В}}(x)$ убывает при $0 \le x \le x^*$, а при $x^* \le x$ она возрастает. Стало быть, её минимальное значение достигается в точке x^*.

Таким образом,

$$x_{\text{В}} = x^*;\ F_{\text{В}}(x_{\text{В}}) = \frac{c_1 c_2}{c_1 + c_2}(b - a).$$

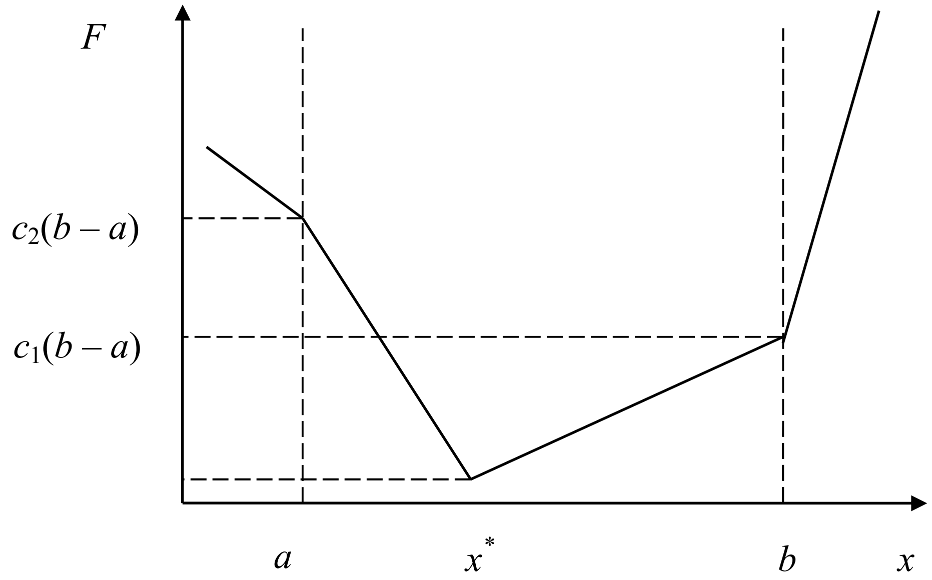

Рис. 2.1

Пусть для получения решения используется *критерий Сэвиджа*. Из формулы (2.1) следует, что $\min\limits_{z \ge 0} f(z, y) = 0$ при любом $y \in [a,b]$. Согласно замечанию 5 из первого параграфа, критерий Сэвиджа в данном примере переходит в критерий Вальда и, следовательно, $x_{\text{С}} = x^*$.

Рассмотрим *критерий Лапласа*. Плотность равномерного распределения на отрезке $[a,b]$ задаётся формулой $p(y) = 1/(b - a)$ при $y \in$ $\in [a,b]$ и $p(y) = 0$ в противном случае. Поэтому

$$F_{\text{Л}}(x) = \frac{1}{b - a}\int_a^b f(x, y)dy.$$

Рассмотрим три случая.

1. Пусть $x \in [0,a)$. Тогда

$$F_{\text{Л}}(x) = \frac{1}{b - a}\int_a^b c_2(y - x)dy = c_2\left(\frac{a + b}{2} - x\right).$$

2. Пусть $x \in [a, b]$. Тогда

$$F_{Л}(x)=\frac{1}{b-a}\int_b^x c_1(x-y)dy+\frac{1}{b-a}\ c_2(y-x)dy=\frac{c_1(x-a)^2}{2(b-a)}+\frac{c2(b-a)^2}{2(b-a)}.$$

3. Пусть $x > b$. Тогда

$$F_{Л}(x)=\frac{1}{b-a}\int_a^b c_1(x-y)dy=c_2\left(x-\frac{a+b}{2}\right).$$

При $x \in [a,b]$ графиком функции $F_Л(x)$ является парабола, ветви которой направлены вверх. Найдём координаты её вершины. Производная

$$F_{Л}'(x)=\frac{c_1(x-a)-c_2(b-x)}{(b-a)}$$

обращается в нуль в точке x^* (2.3). Таким образом, $x_Л = x^*$. Значение функции $F_Л(x)$ в этой точке равно

$$F_{Л}(x^*)=\frac{1}{2}\frac{c_1c_2}{c_1+c_2}(b-a).$$

График полученной функции $F = F_Л(x)$ изображён на рис. 2.2.

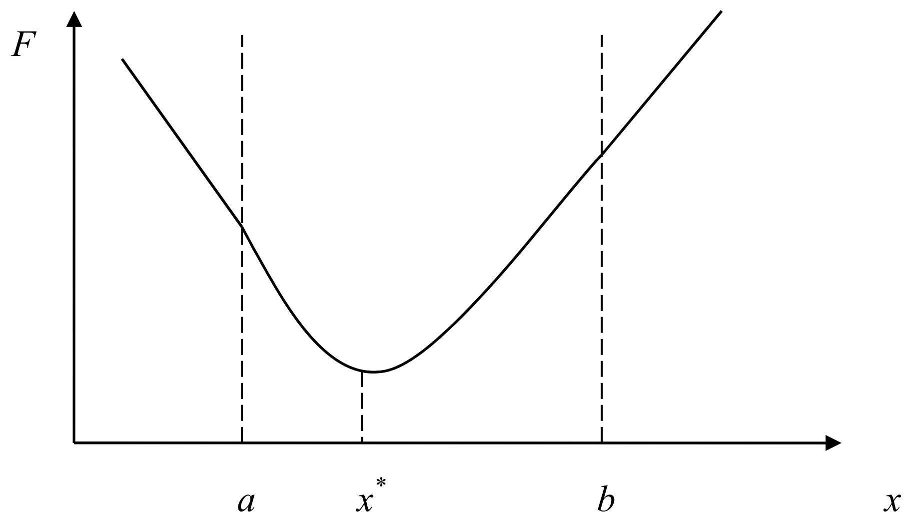

Рис. 2.2

При применении *критерия крайнего оптимизма* функция

$$F_{О}(x)=\min_{a\le y\le b}\begin{cases}c_1(x-y)\ \text{при}\ 0\le y\le x,\\ c_2(y-x)\ \text{при}\ y\ge x\end{cases}=\begin{cases}c_1(b-x)\ \text{при}\ b\le x,\\ c_2(a-x)\ \text{при}\ x\le a,\\ 0\ \text{при}\ a\le x\le b.\end{cases}$$

Поэтому $\min\limits_{x\ge 0} F_{О}(x)=0,$ а в качестве $x_О$ можно брать любую точку из $[a,b]$.

Рассмотрим *критерий Гурвица*. Зафиксируем число $0 \le \nu \le 1$. Поскольку функции $F_{В}(x)$ и $F_{О}(x)$ достигают наименьшего значения в точке x^*, то и функция $F_{Г}(x) = \nu F_{О}(x) + (1 - \nu)F_{В}(x)$ достигает наименьшего значения в точке x^*. Следовательно, $x_{Г} = x^*$ и $F_{Г}(x_{Г}) =$
$= (1-\nu)\dfrac{c_1 c_2}{c_1 + c_2}(b-a)$.

Рассмотрим *критерий Ходжа — Лемана*. Зафиксируем число $0 \le \nu \le$ ≤ 1. Поскольку функции $F_{Л}(x)$ и $F_{В}(x)$ достигают минимального значения в точке x^*, то в этой точке достигает минимального значения и функция $F_{Х\text{-}Л}(x) = \nu F_{Л}(x) + (1 - \nu)F_{В}(x)$. Таким образом, $x_{Х\text{-}Л} = x^*$ и

$$F_{Х\text{-}Л}(x_{Х\text{-}Л})\nu\frac{1}{2}\frac{c_1 c_2}{c_1 + c_2}(b-a) + (1-\nu)\frac{c_1 c_2}{c_1 + c_2}(b-a) =$$

$$= \left(1 - \frac{\lambda}{2}\right)\left(1 - \frac{\nu}{2}\right)\frac{c_1 c_2}{c_1 + c_2}(b-a).$$

Итак, по всем рассмотренным критериям получается одно и то же правило выбора решения x^*, определяемое формулой (2.3).

3. Критерии принятия решений в случае конечного числа стратегий

Рассмотрим случай, когда множества X и Y состоят из конечного числа элементов, а именно $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_m\}$, $Y = \{y_1, y_2, \ldots, y_n\}$.

Обозначим $a_{ij} = f(x_i, y_j)$ и введём в рассмотрение матрицу

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots. & a_{1j} & \ldots. & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots. & a_{2j} & \ldots. & a_{2n} \\ \ldots. & \ldots. & \ldots. & \ldots. & \ldots. & \ldots. \\ a_{i1} & a_{i2} & \ldots. & a_{ij} & \ldots. & a_{in} \\ \ldots. & \ldots. & \ldots. & \ldots. & \ldots. & \ldots. \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots. & a_{mj} & \ldots. & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Можно считать, что ЛПР выбирает строчку у этой матрицы, а неконтролируемый фактор — столбец. Рассмотрим пример, когда ЛПР максимизирует значение a_{ij}, и запишем рассмотренные выше критерии в этом случае.

Критерий Вальда:

$$F_{\text{В}}(i) = \min_{1 \le j \le n} a_{ij}; \; F_{\text{В}}(i_{\text{В}}) = \max_{1 \le j \le m} F_{\text{В}}(i).$$

Критерий Сэвиджа:

$$\varphi_{ij} = \max_{1 \le k \le m} a_{kj} - a_{ij}; \;\; F_{\text{С}}(i) = \max_{1 \le j \le n} \varphi_{ij} = \max_{1 \le j \le n} (\max_{1 \le k \le m} a_{kj} - a_{ij});$$

$$F_{\text{С}}(i_{\text{С}}) = \max_{1 \le i \le n} F_C(i).$$

Критерий Лапласа:

$$F_{\text{Л}}(i) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}; \;\; F_{\text{Л}}(i_{\text{Л}}) = \max_{1 \le i \le m} F_{\text{Л}}(i).$$

Критерий «крайнего оптимизма»:

$$F_{\text{О}}(i) = \max_{1 \le j \le n} a_{ij}; \; F_{\text{О}}(i_{\text{О}}) = \max_{1 \le i \le m} F_{\text{О}}(i).$$

Критерий Гурвица:

$$F_{\text{Г}}(i) = \nu F_{\text{О}}(i) + (1 - \nu) F_{\text{В}}(i); \quad F_{\text{Г}}(i_{\text{Г}}) = \max_{1 \le i \le m} F_{\text{Г}}(i).$$

Критерий Ходжа — Лемана:

$$F_{\text{Х-Л}}(i) = \nu F_{\text{Л}}(i) + (1 - \nu) F_{\text{В}}(i); \quad F_{\text{Х-Л}}(i_{\text{Х-Л}}) = \max_{1 \le i \le m} F_{\text{Х-Л}}(i).$$

Пример 1 (см. [5. С. 57–67]). Фермер имеет поле размером S. Пусть у него имеется только возможность засеять всё поле одной из трёх культур A_1, A_2, A_3. Год может быть засушливым, нормальным или дождливым. Эксперт составил следующую таблицу.

Таблица 3.1

Зависимость урожайности от погоды

Погода	Урожайность в центнерах с одного гектара		
	A_1	A_2	A_3
Сухая	20	7,5	0
Нормальная	5	12,5	7,5
Дождливая	15	5	10
Цена за один центнер	*20*	*40*	*80*

В этом случае ЛПР является фермер, и он выбирает $x_i = A_i$, $i = 1, 2, 3$. Неопределённым фактором является погода и, следовательно, y_1 = {сухая погода}, y_2 = {нормальная погода}, y_3 = {дождливая погода}.

Планируемая выручка от продажи урожая в зависимости от принятого решения и от того, каким будет лето, приведена в табл. 3.2.

Таблица 3.2

Планируемая выручка

Погода	Выручка		
	A_1	A_2	A_3
Сухая	400 S	300 S	0
Нормальная	100 S	500 S	600 S
Дождливая	300 S	200 S	800 S

Разделив выручку на $100S$, запишем матрицу $A = \{f(x_i, y_j)\}$, которая задаёт критерий выбора фермера

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 3 \\ 3 & 5 & 2 \\ 0 & 6 & 8 \end{pmatrix}. \qquad (3.1)$$

Решение примера 1. Найдём стратегии фермера в зависимости от применяемого критерия. Пусть применяется *критерий Вальда*. Из вида матрицы (3.1) следует, что функция $F_{\text{В}}(i) = \min\limits_{1 \le j \le 3} a_{ij}$ принимает следующие значения: $F_{\text{В}}(1) = 1$, $F_{\text{В}}(2) = 2$, $F_{\text{В}}(3) = 0$. Поэтому $\max\limits_{1 \le i \le 3} F_{\text{В}}(i) = 2$ и $i_{\text{В}} = 2$.

Применим *критерий Сэвиджа*. Из (3.1) получим, что функция риска $\varphi_{ij} = \max\limits_{1 \le k \le 3} a_{kj} - a_{ij}$ задаётся матрицей

$$\{\varphi_{ij}\} = \begin{pmatrix} 0 & 5 & 5 \\ 1 & 1 & 6 \\ 4 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Отсюда получим, что функция $F_{\text{С}}(i) = \max\limits_{1 \le j \le 3} \varphi_{ij}$ принимает следующие значения: $F_C(1) = 5$, $F_{\text{С}}(2) = 6$, $F_{\text{С}}(3) = 4$. Поэтому $\max\limits_{1 \le i \le 3} F_C(i) = 4$ и $i_{\text{С}} = 3$.

Рассмотрим *критерий Лапласа*. Имеем $F_{\text{Л}}(i) = \frac{1}{3}(a_{i1} + a_{i2} + a_{i3})$. Следовательно, $F_{\text{Л}}(1) = \frac{8}{3}$, $F_{\text{Л}}(2) = \frac{10}{3}$, $F_{\text{Л}}(3) = \frac{14}{3}$. Поэтому $\max\limits_{1 \le i \le 3} F_{\text{Л}}(i) = \frac{14}{3}$ и $i_{\text{Л}} = 3$.

Применим *критерий крайнего оптимизма*. Функция $F_{\text{О}}(i) = \max\limits_{1 \le j \le 3} a_{ij}$ принимает следующие значения: $F_{\text{О}}(1) = 4$, $F_{\text{О}}(2) = 5$, $F_{\text{О}}(3) = 8$. Поэтому $\max\limits_{1 \le i \le 3} F_{\text{О}}(i) = 8$ и $i_{\text{О}} = 3$.

Зафиксируем число $0 \le \nu \le 1$ и применим *критерий Гурвица*. Имеем $F_{\text{Г}}(i) = \nu F_{\text{О}}(i) + (1 - \nu)F_{\text{В}}(i)$.

Поэтому $F_{\text{Г}}(1) = 4\nu + (1 - \nu) = 3\nu + 1$ и $F_{\text{Г}}(2) = 5\nu + 2(1 - \nu) = 3\nu + 2$, $F_{\text{Г}}(3) = 8\nu$.

При любом числе $0 \le \nu \le 1$ выполнено неравенство $F_{\text{Г}}(2) > F_{\text{Г}}(1)$. Поэтому

$$\max_{1 \le i \le 3} F_{\text{Г}}(i) = \max\{3\nu + 2; 8\nu\} = \begin{cases} 3\nu + 2 \text{ при } 0 \le \nu \le 0{,}4, \\ 8\nu \text{ при } 0{,}4 \le \nu \le 1. \end{cases}$$

Следовательно, $i_{\text{Г}} = 2$ при $0 \le \nu \le 0{,}4$ и $i_{\text{Г}} = 3$ при $0{,}4 \le \nu \le 1$.

Зафиксируем число $0 \le \nu \le 1$ и применим *критерий Ходжа — Лемана*. Имеем $F_{\text{Х-Л}}(i) = \nu F_{\text{Л}}(i) + (1 - \nu)F_{\text{В}}(i)$. Поэтому

$$F_{\text{Х-Л}}(1) = \frac{5}{3}\nu + 1, \quad F_{\text{Х-Л}}(2) = \frac{4}{3}\nu + 2, \quad F_{\text{Х-Л}}(3) = \frac{14}{3}\nu.$$

Покажем, что $F_{\text{Х-Л}}(2) > F_{\text{Х-Л}}(1)$ при любом $0 \le \nu \le 1$. В самом деле,

$$0 \le \nu \le 1 \Rightarrow 1 > \frac{1}{3}\nu \Rightarrow \frac{4}{3}\nu + 2 > \frac{5}{3}\nu + 1 \Rightarrow F_{\text{Х-Л}}(2) > F_{\text{Х-Л}}(1).$$

Поэтому

$$\max_{1 \le i \le 3} F_{\text{Х-Л}}(i) = \max\left\{\frac{4}{3}\nu + 2; \frac{14}{3}\nu\right\} = \begin{cases} \frac{14}{3}\nu \text{ при } 0{,}6 \le \nu \le 1, \\ \frac{4}{3}\nu + 2 \text{ при } 0 \le \nu \le 0{,}6. \end{cases}$$

Следовательно, $i_{\text{Х-Л}} = 2$ при $0 \le \nu \le 0{,}6$, $i_{\text{Х-Л}} = 3$ при $0{,}6 \le \nu \le 1$.

Рассмотрим вариант, когда ЛПР минимизирует значение a_{ij} и запишем рассмотренные выше критерии в этом случае.

Критерий Вальда:

$$F_{\text{В}}(i) = \max_{1 \le j \le n} a_{ij}; \; F_{\text{В}}(i_{\text{В}}) = \min_{1 \le j \le m} F_{\text{В}}(i).$$

Критерий Сэвиджа*:*

$$\varphi_{ij} = \max_{1 \le k \le m} a_{kj} - a_{ij}; \;\; F_{\text{С}}(i) = \max_{1 \le j \le n} \varphi_{ij} = \max_{1 \le j \le n}(\max_{1 \le k \le m} a_{kj} - a_{ij});$$

$$F_{\text{С}}(i_{\text{С}}) = \min_{1 \le i \le m} F_{C}(i).$$

Критерий Лапласа:

$$F_{\text{Л}}(i) = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}; \;\; F_{\text{Л}}(i_{\text{Л}}) = \max_{1 \le i \le m} F_{\text{Л}}(i).$$

Критерий «крайнего оптимизма»:

$$F_{\text{О}}(i) = \max_{1 \le j \le n} a_{ij}; \;\; F_{\text{О}}(i_{\text{О}}) = \max_{1 \le i \le m} F_{\text{О}}(i).$$

Критерий Гурвица:

$$F_{\Gamma}(i) = \nu F_{\text{О}}(i) + (1-\nu) F_{\text{В}}(i); \quad F_{\Gamma}(i_{\Gamma}) = \max_{1 \le i \le m} F_{\Gamma}(i).$$

Критерий Ходжа — Лемана:

$$F_{\text{Х-Л}}(i) = \nu F_{\text{Л}}(i) + (1-\nu) F_{\text{В}}(i);$$

$$F_{\text{Х-Л}}(i_{\text{Х-Л}}) = \max_{1 \le i \le m} F_{\text{Х-Л}}(i).$$

4. Применение смешанных стратегий — путь к уменьшению риска

Возникает вопрос, как уменьшить значение величины риска?

Довольно часто при выборе правила поведения, уменьшающего величину риска в задачах принятия решения при неопределённости, пользуются истиной, которая содержится в английской пословице «Не держи все яйца в одной корзине».

Рассмотрим два практических примера принятия решений в условиях неопределённости, основанных на этом правиле.

Пример 1 (см. [9. С. 459]). Постепенная утрата Италией с конца I в. н. э. преимущественного экономического положения сказалось в отливе средств и в запустении земель. В качестве одного из средств борьбы с этим явлением император Траян обязал каждого римского сенатора одну треть своего имущества вложить в италийские земли. Одним из источников, дающих представление об экономической жизни Рима того времени, являются письма Плиния Младшего, видного сенатора, близкого ко двору Трояна, управляющего одно время провинцией Вифиния. Из его письма видно, что сам Плиний Младший предпочитал иметь земельные владения в разных местах Италии. По его словам, этим он страховал себя от неожиданностей.

Пример 2. А вот свежий пример. Доставка космонавтов и грузов на Международную космическую станцию возможно было проводить либо с помощью российских кораблей «Союз», либо с помощью американских «Шаттлов». Как показали дальнейшие события (крушение американского космического корабля), принятое решение о том, что доставка будет осуществляться и теми и другими кораблями, оказалось правильным.

Таким образом, эти примеры показывают, что если имеется несколько возможностей принятия решения, то нужно использовать их все, или использовать так называемые *смешанные стратегии.*

Рассмотрим случай, когда множество $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_m\}$ стратегий ЛПР конечно. Смешанная стратегия означает, что ЛПР выбирает набор чисел

$$\lambda_i \geq 0,\ i = \overline{1,m},\ \sum_{i=1}^{m} \lambda_i = 1.$$

В этом случае целевая функция, на значение которой ориентируется ЛПР при выборе смешанной стратегии, равна

$$F(\lambda_1, \ldots, \lambda_m, y) = \sum_{i=1}^{m} \lambda_1 f(x_i, y).$$

Пример 3. Вычислим решение задачи о вкладе при применении смешанных стратегий. В рассматриваемом случае смешанная стратегия означает следующее поведение вкладчика: он делит имеющуюся у него сумму денег на две части λN и $(1-\lambda)N$, $0 \le \lambda \le 1$. Первую сумму он кладёт на рублёвый вклад, а вторую — на долларовый. Через год у него окажется сумма, равная $F(\lambda,y) = R\lambda + D(1-\lambda)y$.

Таким образом, имеем следующую задачу принятия решения:

$$F(\lambda, y) = R\lambda + D(1-\lambda)y \xrightarrow[\lambda]{} \max, \text{ где } \lambda \in [0,1], y \in [a,b]. \tag{4.1}$$

Найдём стратегии вкладчика, выбирающего число $\lambda \in [0,1]$, в зависимости от применяемого критерия.

Вначале рассмотрим задачу (4.1) для случая, когда ЛПР известно значение отношения курсов валюты $y = K_1/K_0$. Тогда, учитывая что функция $F(\lambda,y)$ линейно зависит от λ, получим равенство

$$\max_{0\le\lambda\le1} F(\lambda, y) = \max(R; Dy). \tag{4.2}$$

Максимальное значение достигается при

$$\lambda(y) = \begin{cases} 0 \text{ при } R < Dy, \\ \forall\lambda \in [0,1] \text{ при } R = Dy, \\ 1 \text{ при } R > Dy. \end{cases} \tag{4.3}$$

Пусть применяется *критерий Вальда*. Тогда из (4.1) получим, что

$$F_{\text{В}}(\lambda) = \min_{a\le y\le b}(R\lambda + D(1-\lambda)y) = R\lambda + D(1-\lambda)a.$$

Максимальное значение этой функции достигается в точке

$$\lambda_{\text{В}} = \begin{cases} 0 \text{ при } R < Da, \\ \forall\lambda \in [0,1] \text{ при } R = Da, \\ 1 \text{ при } R > Da, \end{cases}$$

и равно $F_{\text{В}}(\lambda_{\text{В}}) = Da$ при $R \le Da$, $F_{\text{В}}(\lambda_{\text{В}}) = R$ при $Da < R$.

Применим к задаче (4.1) *критерий Сэвиджа*. Из формулы (4.2) следует, что функция риска в смешанных стратегиях равна

$$\varphi(\lambda, y) = \max(R; Dy) - R\lambda - D(1-\lambda)y = D\max\left((1-\lambda)\left(\frac{R}{D} - y\right); \lambda\left(y - \frac{R}{D}\right)\right).$$

Поэтому функция Сэвиджа в смешанных стратегиях имеет вид

$$F_{\text{С}}(\lambda) = D\max_{a\le y\le b}\max\left((1-\lambda)\left(\frac{R}{D} - y\right); \lambda\left(y - \frac{R}{D}\right)\right).$$

Отсюда получим, что

$$F_{\text{C}}(\lambda) = D\max\left((1-\lambda)\left(\frac{R}{D}-a\right);\lambda\left(b-\frac{R}{D}\right)\right).$$

График этой функции приведён на рис. 4.1. Её минимальное значение достигается в точке

$$\lambda_* = \frac{R/D-a}{b-a}. \tag{4.4}$$

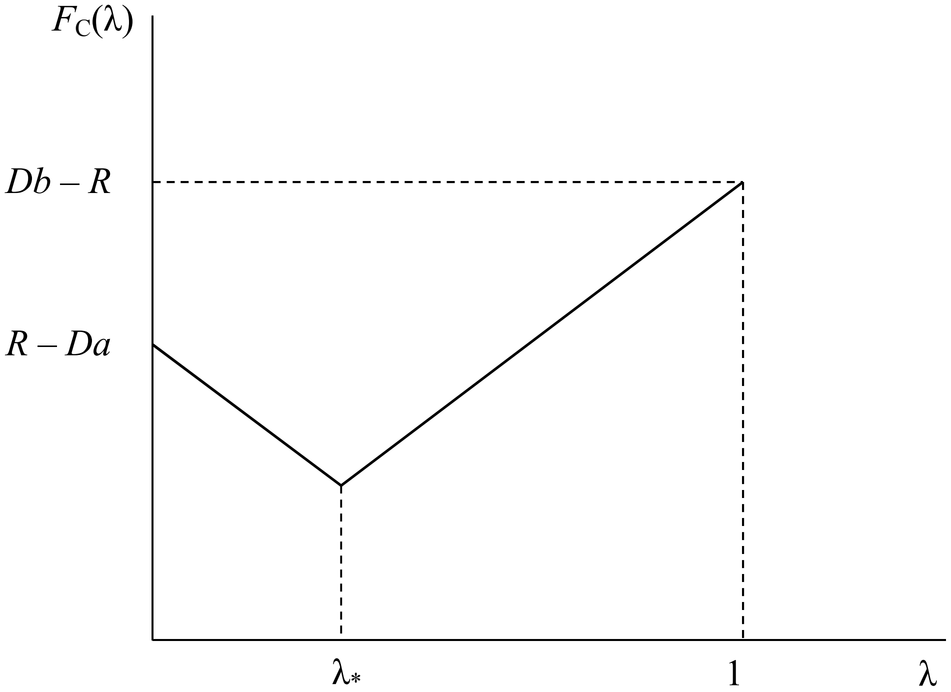

Рис. 4.1

Таким образом, оптимальная по Сэвиджу смешанная стратегия совпадает с долей возможных значений y, находящихся левее числа R/D. Для таких y рублёвый вклад даёт большее накопление.

Величина максимально возможного риска равна

$$F_{\text{C}}(\lambda_*) = \frac{D}{b-a}\left(\frac{R}{D}-a\right)\left(b-\frac{R}{D}\right).$$

Очевидно неравенство

$$\frac{D}{b-a}\left(\frac{R}{D}-a\right)\left(b-\frac{R}{D}\right) < \min(Db-R; R-Da). \tag{4.5}$$

Это означает, что применение смешанной стратегии уменьшает величину максимально возможного риска. Например, при $R/D = (a+b)/2$ левая часть неравенства (4.5) равна $\frac{D}{4}(b-a)$, а правая часть равна

$\frac{D}{2}(b-a)$. Значит, применение смешанной стратегии в два раза уменьшает величину максимально возможного риска.

Отметим ещё одно свойство стратегии (4.4). Допустим, что значение отношения курсов валюты является случайной величиной с равномерным распределением на отрезке $[a,b]$. Тогда среднее значение стратегии (4.3) равно

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b \lambda(y)dy = \frac{1}{b-a}\int_a^{R/D} dy = \frac{R/D-a}{b-a} = \lambda_*.$$

Замечание 1. При принятии решения по критерию Вальда используется только нижняя граница (число a) отрезка возможных значений неопределённого фактора y, в то время как при использовании критерия Сэвиджа используется также и верхняя граница (число b) этого отрезка.

Рассмотрим *критерий Лапласа*. Имеем

$$F_{\text{Л}}(\lambda) = \frac{1}{b-a}\int_a^b (R\lambda + D(1-\lambda)y)dy = R\lambda + D(1-\lambda)\frac{b+a}{2}.$$

Следовательно, точка $\lambda_{\text{Л}}$, максимизирующая эту функцию, равна

$$\lambda_{\text{Л}} = \begin{cases} 0 \text{ при } R < D\dfrac{a+b}{2}, \\ \forall\lambda \in [0,1] \text{ при } R = D\dfrac{a+b}{2}, \\ 1 \text{ при } R > D\dfrac{a+b}{2}. \end{cases}$$

Стало быть, оптимальная по Лапласу смешанная стратегия получается из формулы (4.3), в которой ЛПР берёт среднее значение $y = (a + b)/2$ между наихудшим и наилучшим для себя отношениями курса валют.

Замечание 2. Пусть неопределённый фактор y является случайной величиной и известно её среднее значение (математическое ожидание): $m = M(y) = M(K_1/K_0)$. Тогда среднее значение общей суммы, полученной через год вкладчиком, равняется $R\lambda + D(1 - \lambda)m$. Максимизируя эту величину, находим

$$\lambda(m) = \begin{cases} 0 \text{ при } R < Dm, \\ \forall\lambda \in [0,1] \text{ при } R = Dm, \\ 1 \text{ при } R > Dm. \end{cases}$$

При применении *критерия крайнего оптимизма* имеем функцию

$$F_{\text{О}}(\lambda) = \max_{a \le y \le b}(R\lambda + D(1-\lambda)y) = R\lambda + D(1-\lambda)b.$$

Поэтому максимальное значение этой функции достигается в точке

$$\lambda_{\text{О}} = \begin{cases} 0 \text{ при } R < Db, \\ \forall\lambda \in [0,1] \text{ при } R = Db, \\ 1 \text{ при } R > Db. \end{cases}$$

Стало быть, оптимальная по крайнему оптимизму смешанная стратегия получается из формулы (4.3), в которой ЛПР берёт самое наилучшее для себя отношение курса $y = b$.

Рассмотрим *критерий Гурвица*. Зафиксируем число $0 < \nu < 1$ и рассмотрим функцию

$$F_{\text{Г}}(\lambda) = \nu F_{\text{О}}(\lambda) + (1-\nu)F_{\text{В}}(\lambda) = R\lambda + D(1-\lambda)(\nu b + (1-\nu)a).$$

Максимальное значение этой функции достигается в точке

$$\lambda_{\text{Г}} = \begin{cases} 0 \text{ при } R < D(\nu b + (1-\nu)a), \\ \forall\lambda \in [0,1] \text{ при } R = D(\nu b + (1-\nu)a), \\ 1 \text{ при } R > D(\nu b + (1-\nu)a). \end{cases}$$

Стало быть, оптимальная по Гурвицу стратегия получается из формулы (4.3), в которой ЛПР берёт промежуточное значение $y = \nu b + (1-\nu)a$ отношения курса.

Рассмотрим *критерий Ходжа — Лемана*. Зафиксируем число $0 < \nu < 1$ и рассмотрим функцию

$$F_{\text{Х-Л}}(\lambda) = \nu F_{\text{Л}}(\lambda) + (1-\nu)F_{\text{В}}(\lambda) = R\lambda + D(1-\lambda)\left(\left(1-\frac{\nu}{2}\right)a + \frac{\nu}{2}b\right).$$

Максимальное значение этой функции достигается в точке

$$\lambda_{\text{Х-Л}} = \begin{cases} 0 \text{ при } R < D\left(\left(1-\frac{\nu}{2}\right)a + \frac{\nu}{2}b\right), \\ \forall\lambda \in [0,1] \text{ при } R = D\left(\left(1-\frac{\nu}{2}\right)a + \frac{\nu}{2}b\right), \\ 1 \text{ при } R > D\left(\left(1-\frac{\nu}{2}\right)a + \frac{\nu}{2}b\right). \end{cases}$$

Стало быть, оптимальная по Ходжу — Лемана стратегия получается из формулы (4.3), в которой ЛПР берёт промежуточное значение отношения курса:

$$y = \left(\left(1-\frac{\nu}{2}\right)a + \frac{\nu}{2}b\right).$$

Замечание 3. Поскольку $(1-\nu)a+\nu b > \left(1-\frac{\nu}{2}\right)a+\frac{\nu}{2}b,$ то при применении критерия Гурвица ЛПР исходит из условия более благоприятного для себя отношения курса, чем при применении критерия Ходжа — Лемана (при одинаковом значении параметра ν).

Рассмотрим случай, когда $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_m\}$, $Y = \{y_1, y_2, \ldots, y_n\}$. Обозначим $a_{ij} = f(x_i, y_j)$. Введём матрицу

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1j} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2j} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{i1} & a_{i2} & \ldots & a_{ij} & \ldots & a_{in} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mj} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Считаем, что ЛПР выбирает смешанную стратегию $\bar{\lambda} \in \Lambda_m$, где обозначено

$$\Lambda_m = \left\{\bar{\lambda} = (\lambda_1, \ldots, \lambda_m):\ \lambda_i \geq 0,\ i = \overline{1,m},\ \sum_{i=1}^{m} \lambda_i = 1\right\}. \qquad (4.6)$$

Неконтролируемый фактор выбирает j-й столбец матрицы A. ЛПР стремится максимизировать величину

$$q_j(\bar{\lambda}) = \sum_{i=1}^{m} a_{ij}\lambda_i = 1, j = \overline{1,n}. \qquad (4.7)$$

Отметим, что ранее рассмотренные стратегии ЛПР, когда он выбирает i-ю строку, получаются из смешанных, если брать наборы $\bar{\lambda}$, в которых только на одном месте стоит единица, а на всех остальных — нули. Такие стратегии называются *чистыми стратегиями ЛПР*.

Запишем для смешанных стратегий рассмотренные ранее критерии выбора стратегий. Поскольку множество смешанных стратегий содержит в себе множество чистых стратегий, то применение смешанных стратегий ведёт к улучшению соответствующих показателей по сравнению с применением смешанных стратегий.

В дальнейшем потребуется следующая лемма.

Лемма 1. Для любых чисел b_s, $s = \overline{1, p}$ выполнены равенства

$$\max_{\overline{\chi}} \sum_{s=1}^{p} b_s \chi_s = \max_{1 \le s \le p_s} b_s, \quad \min_{\overline{\chi}} \sum_{s=1}^{p} b_s \chi_s = \min_{1 \le s \le p_s} b_s, \tag{4.8}$$

Здесь наборы $\overline{\chi} = (\chi_1, \chi_2, \ldots, \chi_p)$ удовлетворяют ограничениям $\chi_s \ge 0$ для всех $s = \overline{1, p}$ и $\sum_{s=1}^{p} \chi_s = 1.$

Доказательство. Пусть $\max\limits_{1 \le s \le p_s} b_s = b_q$ при некотором $q = \overline{1, p}$. Покажем, что $\max\limits_{\overline{\chi}} \sum_{s=1}^{p} b_s \chi_s = b_s$. В самом деле, для любого рассматриваемого набора $\overline{\chi}$ выполнено неравенство $\sum_{s=1}^{p} b_s \chi_s \le b_q$. С другой стороны, для набора $\chi_s = 0$ при $s \ne q$ и $\chi_q = 1$ выполнено равенство $\sum_{s=1}^{p} b_s \chi_s = b_q$.

Аналогично доказывается и второе равенство в (4.8).

Критерий Вальда. Как следует из формулы (4.7), в случае смешанных стратегий критерий Вальда принимает вид

$$\hat{F}_{\text{В}}(\overline{\lambda}) = \min_{1 \le j \le n} \sum_{i=1}^{m} a_{ij} \lambda_i, \; \hat{F}_{\text{В}}(\overline{\lambda}_{\text{В}}) = \max_{\overline{\lambda} \in \Lambda_m} \hat{F}_{\text{В}}(\overline{\lambda}). \tag{4.9}$$

Смешанная стратегия $\overline{\lambda}_{\text{В}}$, являющаяся решением задачи (4.9), называется *смешанной максиминной стратегией*. Для её нахождения можно воспользоваться следующей теоремой.

Теорема 1. Пусть набор числа ν и μ_j, $j = \overline{1, n}$ удовлетворяют условиям

$$\sum_{j=1}^{n} a_{1j} \mu_j \le \nu, \ldots, \; \sum_{j=1}^{n} a_{mj} \mu_j \le \nu, \; \sum_{j=1}^{n} \mu_j = 1, \; \mu_j \ge 0, \; j = \overline{1, n}. \tag{4.10}$$

Тогда смешанная стратегия $\overline{\lambda}^{(1)}$, удовлетворяющая условиям

$$\sum_{i=1}^{m} a_{i1} \lambda_i^{(1)} \ge \nu, \ldots, \; \sum_{i=1}^{m} a_{im} \lambda_i^{(1)} \ge \nu, \; \sum_{i=1}^{m} \lambda_i^{(1)} = 1, \; \lambda_i^{(1)} \ge 0, \; i = \overline{1, m}, \tag{4.11}$$

является максиминной. Число $\nu = \hat{F}_{\text{В}}(\overline{\lambda}^{(1)})$.

Доказательство. Из первой формулы (4.9) и из второго равенства в (4.8) следует, что для любого набора $\overline{\lambda} \in \Lambda_m$ выполнено неравенство

$$\hat F_{\text{В}}(\overline{\lambda}) \le \sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{m} a_{ij}\lambda_i\right)\mu_j .$$

Переставляя местами операции суммирования и используя условия (4.10) и (4.11), получим

$$\hat F_{\text{В}}(\overline{\lambda}) \le \sum_{i=1}^{m}\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\mu_j\right)\lambda_i \le \nu \le \min_{1\le j\le n}\sum_{i=1}^{m} a_{ij}\lambda_i^{(1)} = \hat F_{\text{В}}(\overline{\lambda}^{(1)}).$$

Следовательно,

$$\hat F_{\text{В}}(\overline{\lambda}^{(1)}) = \max_{\overline{\lambda}\in\Lambda_m}\hat F_{\text{В}}(\overline{\lambda}) \le \nu \le \hat F_{\text{В}}(\overline{\lambda}^{(1)}).$$

Критерий Сэвиджа. В случае смешанных стратегий для любой стратегии $\overline{\lambda}\in\Lambda_m$ функция риска равна

$$\varphi_j(\overline{\lambda}) = \max_{\overline{\chi}\in\Lambda_m}\left(\sum_{i=1}^{m} a_{ij}\chi_i\right) - \sum_{i=1}^{m} a_{ij}\lambda_i .$$

Используя первое равенство (4.8), а также равенство $\sum\limits_{i=1}^{m}\lambda_i = 1$, получим

$$\max_{\overline{\chi}\in\Lambda_m}\left(\sum_{i=1}^{m} a_{ij}\chi_i\right) = \max_{1\le s\le m} a_{sj} = \sum_{i=1}^{m}\left(\max_{1\le s\le m} a_{sj}\right)\lambda_i .$$

Поэтому

$$\varphi_j(\overline{\lambda}) = \sum_{i=1}^{m}\varphi_{ij}\lambda_i,\quad \varphi_{ij} = \max_{1\le s\le m} a_{sj} - a_{ij}. \qquad (4.12)$$

Критерий Сэвиджа в смешанных стратегиях принимает вид

$$\hat F_{\text{С}}(\overline{\lambda}) = \max_{1\le j\le n}\varphi_j(\overline{\lambda}),\quad \hat F_{\text{С}}(\overline{\lambda}_{\text{С}}) = \min_{\overline{\lambda}\in\Lambda_m}\hat F_{\text{С}}(\overline{\lambda}). \qquad (4.13)$$

Для нахождения смешанной стратегии $\overline{\lambda}_{\text{С}}$, минимизирующую функцию риска (4.12), можно воспользоваться следующей теоремой.

Теорема 2. Пусть набор числа γ и μ_j, $j=\overline{1,n}$ удовлетворяют условиям

$$\sum_{j=1}^{n}\varphi_{1j}\mu_j \le \gamma,\ldots,\ \sum_{j=1}^{n}\varphi_{mj}\mu_j \le \gamma,\ \ \sum_{j=1}^{n}\mu_j = 1,\ \ \mu_j \ge 0,\ \ j=\overline{1,n}. \qquad (4.14)$$

Тогда смешанная стратегия $\overline{\lambda}^{(2)}$, удовлетворяющая условиям

$$\sum_{i=1}^{m}\varphi_{i1}\lambda_i^{(2)} \ge \gamma,\ldots,\ \sum_{i=1}^{m}\varphi_{in}\lambda_i^{(2)} \ge \gamma,\ \ \sum_{i=1}^{m}\lambda_i^{(2)} = 1,\ \ \lambda_i^{(2)} \ge 0,\ \ i=\overline{1,m}, \qquad (4.15)$$

является оптимальной по Слейтеру. Число $\gamma = \hat F_{\text{С}}(\overline{\lambda}^{(2)})$.

Доказательство. Из первого равенства (4.8) следует, что для любого набора чисел $\overline{\lambda} \in \Lambda_m$ выполнено неравенство

$$\hat{F}_{\text{С}}(\overline{\lambda}) = \max_{1 \le j \le n}\left(\sum_{i=1}^{m} \varphi_{ij}\lambda_i\right) \ge \sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{m} \varphi_{ij}\lambda_i\right)\mu_j$$

для любых чисел $\mu_j \ge 0$, $\sum_{j=1}^{n}\mu_j = 1$. Меняя местами операции суммирования и используя условия (4.14) и (4.15), получим

$$\hat{F}_{\text{С}}(\overline{\lambda}) \ge \sum_{i=1}^{m}\left(\sum_{j=1}^{n} \varphi_{ij}\mu_i\right)\lambda_i \ge \gamma \ge \max_{1 \le j \le n}\sum_{i=1}^{m} \varphi_{ij}\lambda_i^{(2)} = \hat{F}_{\text{С}}(\overline{\lambda}^{(2)}).$$

Следовательно,

$$\hat{F}_{\text{С}}(\overline{\lambda}^{(2)}) = \min_{\overline{\lambda} \in \Lambda_m}\hat{F}_{\text{С}}(\overline{\lambda}) \ge \gamma \ge \hat{F}_{\text{С}}(\overline{\lambda}^{(2)}).$$

Критерий Лапласа. В случае смешанных стратегий имеем

$$\hat{F}_{\text{Л}}(\overline{\lambda}) = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{m} a_{ij}\lambda_i\right) = \sum_{i=1}^{m} F_{\text{Л}}(i)\lambda_i. \tag{4.16}$$

Здесь функция $F_{\text{Л}}(i) = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}$ является функцией Лапласа в задаче с чистыми стратегиями. Из равенства (4.8) следует, что

$$\hat{F}_{\text{Л}}(\overline{\lambda}_{\text{Л}}) = \max_{\overline{\lambda} \in \Lambda_m}\hat{F}_{\text{Л}}(\overline{\lambda}) = \max_{\overline{\lambda} \in \Lambda_m}\sum_{i=1}^{m} F_{\text{Л}}(i)\lambda_i = \max_{0 \le i \le m} F_{\text{Л}}(i) = F_{\text{Л}}(i_{\text{Л}}).$$

Таким образом, применение в критерии Лапласа смешанных стратегий не приводит к улучшению результата по сравнению с применением чистых стратегий.

Критерий «крайнего оптимизма». При использовании смешанных стратегий в критерии «крайнего оптимизма» имеем

$$\hat{F}_{\text{О}}(\overline{\lambda}) = \max_{0 \le j \le n}\sum_{i=1}^{m} a_{ij}\lambda_i. \tag{4.17}$$

Следовательно,

$$\hat{F}_{\text{О}}(\overline{\lambda}) = \max_{0 \le j \le n}\sum_{i=1}^{m} a_{ij}\lambda_i \le \sum_{i=1}^{m}(\max_{0 \le j \le n} a_{ij})\lambda_i = \sum_{i=1}^{m} F_{\text{О}}(i)\lambda_i.$$

Здесь функция $F_{\text{О}}(i) = \max_{0 \le j \le n} a_{ij}$ является функцией в критерии «крайнего оптимизм»а в чистых стратегиях. Следовательно, применяя равенство (4.8), получим

$$\max_{1 \le i \le m} F_{\text{О}}(i) = \max_{\overline{\lambda} \in \Lambda_m}\hat{F}_{\text{О}}(\overline{\lambda}) \le \max_{\overline{\lambda} \in \Lambda_m}\sum_{i=1}^{m} F_{\text{О}}(i)\lambda_i = \max_{1 \le i \le m} F_{\text{О}}(i).$$

Таким образом, применение в критерии «крайнего оптимизма» смешанных стратегий не приводит к улучшению результата по сравнению с применением чистых стратегий.

Критерий Гурвица. Зафиксируем число $0 < \nu < 1$. В случае смешанных стратегий имеем $\hat{F}_{\text{Г}}(\overline{\lambda}) = \nu \hat{F}_{\text{О}}(\overline{\lambda}) + (1-\nu)\hat{F}_{\text{В}}(\overline{\lambda})$. Подставляя сюда значения функций (4.9) и (4.17), получим, что

$$\hat{F}_{\text{Г}}(\overline{\lambda}) = \nu \max_{0 \le j \le n} \sum_{i=1}^{m} a_{ij}\lambda_i + (1-\nu) \min_{1 \le j \le n} \sum_{i=1}^{m} a_{ij}\lambda_i =$$

$$= \max_{0 \le k \le n} \left(\nu \sum_{i=1}^{m} a_{ij}\lambda_i + (1-\nu) \min_{1 \le j \le n} \sum_{i=1}^{m} a_{ij}\lambda_i \right).$$

Таким образом,

$$\hat{F}_{\text{Г}}(\overline{\lambda}) = \max_{0 \le k \le n} \min_{1 \le j \le n} \sum_{i=1}^{m} b_{ij}^{(k)}\lambda_i, \quad b_{ij}^{(k)} = \nu a_{ik} + (1-\nu) a_{ij}.$$

Поэтому

$$\hat{F}_{\text{Г}}(\overline{\lambda}_{\text{Г}}) = \max_{\overline{\lambda} \in \Lambda_m} \left(\max_{0 \le k \le n} \min_{1 \le j \le n} \sum_{i=1}^{m} b_{ij}^{(k)}\lambda_i \right) = \max_{0 \le \kappa \le n} \left(\max_{\overline{\lambda} \in \Lambda_m} \min_{1 \le j \le n} \sum_{i=1}^{m} b_{ij}^{(k)}\lambda_i \right).$$

Таким образом, для каждого номера $k = \overline{1,n}$ ищется максиминная стратегия $\overline{\lambda}_{(k)} = (\lambda^{(k)}{}_1, \ldots, \lambda^{(k)}{}_m)$ в задаче

$$\min_{1 \le j \le n} \sum_{i=1}^{m} b_{ij}^{(k)}\lambda_i \to \max, \overline{\lambda} \in \Lambda_m.$$

Затем среди этих смешанных стратегий ищется та, которая доставляет максимальное значение выражению $\min\limits_{1 \le j \le n} \sum\limits_{i=1}^{m} b_{ij}^{(k)}\lambda_i^{(k)}$.

Критерия Ходжа — Лемана. Зафиксируем число $0 < \nu < 1$. В случае смешанных стратегий имеем $\hat{F}_{\text{Х-Л}}(\overline{\lambda}) = \nu \hat{F}_{\text{Л}}(\overline{\lambda}) + (1-\nu)\hat{F}_{\text{В}}(\overline{\lambda})$. Подставляя сюда значения функций (4.9) и (4.16), получим

$$\hat{F}_{\text{Х-Л}}(\overline{\lambda}) = \nu \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{m} a_{ij}\lambda_i \right) + (1-\nu) \min_{1 \le j \le n} \sum_{i=1}^{m} a_{ij}\lambda_i =$$

$$= \min_{1 \le j \le n} \left(\frac{\nu}{n} \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{m} a_{ij}\lambda_i \right) + (1-\nu) \sum_{i=1}^{m} a_{ij}\lambda_i \right) = \min_{1 \le j \le n} \sum_{i=1}^{m} c_{ij}\lambda_i.$$

Здесь обозначено $c_{ij} = \dfrac{\nu}{n} \sum\limits_{k=1}^{n} a_{ik} + (1-\nu) a_{ij}$.

Применяя вторую формулу (4.8), можем записать

$$\hat{F}_{\text{Х-Л}}(\overline{\lambda}) = \min_{\overline{\mu} \in M_n} \left(\sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{m} c_{ij} \lambda_i \right) \mu_j \right).$$

Здесь обозначено $M_n = \left\{ \overline{\mu} = (\mu_1, ..., \mu_n) : \mu_j \geq 0,\ j = \overline{1, n},\ \sum_{j=1}^{n} \mu_j = 1 \right\}.$

Таким образом, $\hat{F}_{\text{Х-Л}}(\overline{\lambda}_{\text{Х-Л}}) = \max_{\overline{\lambda} \in \Lambda_m} \min_{\overline{\mu} \in M_n} \left(\sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{m} c_{ij} \lambda_i \right) \mu_j \right).$

Рассмотрим задачу о фермере и дадим ещё одну интерпретацию смешанных стратегий.

Пример 4. Предположим, что фермер может разделить поле на три части и выделить под каждую из культур A_i участок, размером S_i гектаров, причём $S_1 + S_2 + S_3 = S$. Тогда, как следует из табл. 3.1 параграфа 3, планируемая выручка от продажи урожая в зависимости от того, каким будет лето, представлена в табл. 4.1.

Таблица 4.1

Планируемая выручка в зависимости от выбранной фермером стратегии

Погода	Выручка
Сухая	$Q_1 = 400\ S_1 + 300\ S_2$
Нормальная	$Q_2 = 100\ S_1 + 500\ S_2 + 600\ S_3$
Дождливая	$Q_3 = 300\ S_1 + 200\ S_2 + 800\ S_3$

Перейдём к безразмерным величинам

$$\lambda_1 = \frac{S_1}{S},\ \lambda_2 = \frac{S_2}{S},\ \lambda_3 = \frac{S_3}{S}. \tag{4.6}$$

Тогда $\lambda_1 \geq 0$, $\lambda_2 \geq 0$, $\lambda_3 \geq 0$; $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1$. В качестве показателей выручки рассмотрим величины $q_i = \dfrac{Q_i}{100\ S}$. Тогда из табл. 4.1 получим табл. 4.2.

Таблица 4.2

Относительная выручка фермера в безразмерных величинах

Погода	Выручка
Сухая	$q_1 = 4\lambda_1 + 3\lambda_2$
Нормальная	$q_2 = \lambda_1 + 5\lambda_2 + 6\lambda_3$
Дождливая	$q_3 = 3\lambda_1 + 2\lambda_2 + 8\lambda_3$

С помощью матрицы

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4 & 1 & 3 \\ 3 & 5 & 2 \\ 0 & 6 & 8 \end{pmatrix}$$

возможную выручку фермера можно записать в следующем виде:

$$q_1=\sum_{i=1}^{3} a_{i1}\lambda_i,\ \ q_2=\sum_{i=1}^{3} a_{i2}\lambda_i,\ \ q_3=\sum_{i=1}^{3} a_{i3}\lambda_i.$$

Найдём смешанную стратегию фермера исходя из критерия Вальда. Запишем соотношения (4.10) и (4.11) в виде равенств

$$4\lambda_1+3\lambda_2+0\lambda_3=\nu,\ \lambda_1+5\lambda_2+6\lambda_3=\nu,\ 3\lambda_1+2\lambda_2+8\lambda_3=\nu,\ \lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=1,$$
$$4\mu_1+\mu_2+3\mu_3=\nu,\ 3\mu_1+5\mu_2+2\mu_3=\nu,\ 0\mu_1+6\mu_2+8\mu_3=\nu,\ \mu_1+\mu_2+\mu_3=1.$$

Решая эту систему уравнений методом Гаусса, находим

$$\lambda_1^{(1)}=\frac{22}{45},\ \ \lambda_2^{(1)}=\frac{18}{45},\ \ \lambda_3^{(1)}=\frac{5}{45},\ \ \mu_1=\frac{25}{45},\ \ \mu_2=\frac{9}{45},\ \ \mu_3=\frac{11}{45},\ \ \nu=\frac{142}{45}.$$

Найденное решение имеет следующий смысл: если фермер разделит поле в пропорции 22 : 18 : 5 между культурами A_1, A_2, A_3, то при любой погоде он получит прибыль, не меньше 142/45. Отметим, что в случае чистых стратегий максимальная гарантированная прибыль фермера равна 2.

Найдём смешанную стратегию фермера исходя из критерия Сэвиджа. Из формулы (4.12) вычислим числа φ_{ij}, которые запишем матрицей

$$\begin{pmatrix} 0 & 5 & 5 \\ 1 & 1 & 6 \\ 4 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Для нахождения минимальной по риску смешанной стратегии запишем соотношения (4.14) и (4.15) в виде равенств

$$0\lambda_1+\lambda_2+4\lambda_3=\gamma,\ 5\lambda_1+\lambda_2+0\lambda_3=\gamma,\ 5\lambda_1+6\lambda_2+0\lambda_3=\gamma,\ \lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=1,$$
$$0\mu_1+5\mu_2+5\mu_3=\gamma,\ \mu_1+\mu_2+6\mu_3=\gamma,\ 4\mu_1+0\mu_2+0\mu_3=\gamma,\ \mu_1+\mu_2+\mu_3=1.$$

Решая эту систему уравнений, находим, что $\mu_1=25/45$, $\mu_2=9/45$, $\mu_3=11/45$, $\nu=100/45$; $\lambda_1=20/45$, $\lambda_2=0$, $\lambda_3=25/45$. Найденное решение имеет следующий смысл: фермер не засеивает культуру A_2, а между оставшимися культурами A_1 и A_3 делит поле в пропорции 20 : 25. Тогда при любой погоде значение минимаксного риска не больше $100/45=2{,}(2)$. Отметим, что в чистых стратегиях $i_{\text{В}}=3$ и $F_{\text{В}}(i_{\text{В}})=4$.

Таким образом, применение смешанной стратегии почти в два раза уменьшает значение величины минимаксного риска.

5. Принципы выбора стратегий в многокритериальных задачах при отсутствии неопределённости

Рассмотрим вопрос о выборе стратегии, когда имеется несколько критериев.

Пример 1 [10. С. 33–34]. Для двух одинаковых по размеру городов A и B (см. рис. 5.1) выбирается месторасположение совместного предприятия P сферы обслуживания. Города соединены двумя дорогами $ADEB$ и ACB. Протяжённость дороги $ADEB$ составляет 5 км, а длина дороги ACB равна 3 км. На участке BC предприятие не может быть расположено по природным условиям. Расстояние от A до C равно 1 км. Таким образом, предприятие может быть построено либо на длинной дороге $ADEB$, либо на участке AC короткой дороги ACB. Каждому городу хочется, чтобы предприятие M было расположено поближе к нему.

Обозначим через x длину ломаной $CADP$. Тогда $0 \le x \le 6$. Обозначим через $\rho_A(x)$ кратчайшее расстояние от точки A до точки P, а через $\rho_B(x)$ — от точки B до точки P. Тогда (см. рис. 5.1)

$$\rho_A(x) = 1 - x \text{ при } 0 \le x \le 1;\ \rho_A(x) = x - 1 \text{ при } 1 \le x \le 5;$$
$$\rho_A(x) = 9 - x \text{ при } 5 \le x \le 6;\ \rho_B(x) = 2 + x \text{ при } 0 \le x \le 2;$$
$$\rho_B(x) = 6 - x \text{ при } 2 \le x \le 6.$$

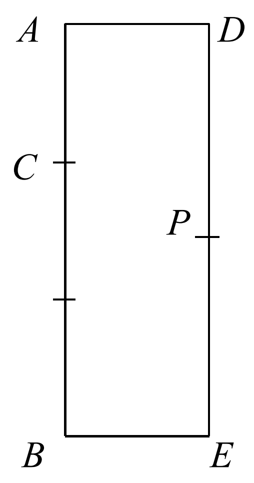

Рис. 5.1

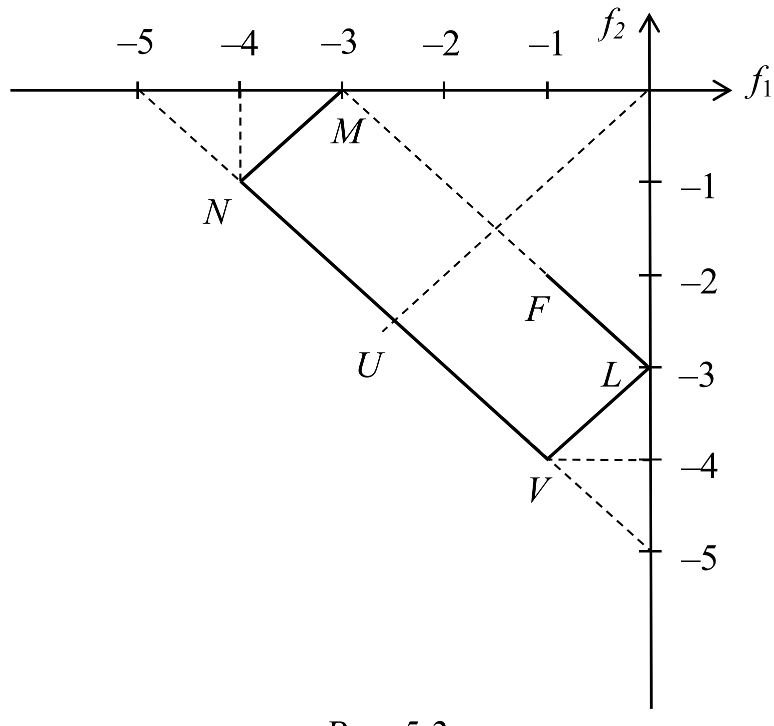

Рис. 5.2

Возникает вопрос о выборе числа $x \in [0,6]$, чтобы удовлетворить интересы городов в минимизации $\rho_A(x)$ и $\rho_B(x)$.

Французский историк, социолог и политический деятель А. Токвиль писал: «Стремление людей к равенству является страстным, ненасытным, вечным, непобедимым» [10. С. 33]. Равное распределение дохода от кооперации — простой и фундаментальный принцип справедливости. Это так называемый *принцип равенства*.

На плоскости (f_1,f_2) нарисуем кривую $f_1 = -\rho_A(x)$, $f_2 = -\rho_B(x)$, $0 \le x \le 6$. Этой кривой является ломаная $FLKNM$ (см. рис. 5.2). Пользуясь принципом равенства, найдём на этой ломаной точку, в которой $f_1 = f_2$. Такой точкой является U — середина отрезка NV. Ей соответствует значение $x = 3{,}5$. Стало быть, следуя этому принципу равенства, предприятие P нужно строить в точке Q, являющейся серединой отрезка DE. Тогда $\rho_A(3{,}5) = \rho_B(3{,}5) = 2{,}5$.

Очевидно, что расстояния от точки C до городов A и B меньше, чем 2,5. Каждому из городов выгоднее, если предприятие будет расположено в точке C, чем в точке, которая получается из принципа равенства.

Итальянский экономист и социолог В. Парето сформулировал принцип единогласия. Применительно к рассматриваемому примеру он означает следующее: если для обоих городов значение $x \in [0,6]$ лучше значения $x_* \in [0,6]$, то значение x_* не должно приниматься.

В честь Парето принцип единогласия называется *принципом оптимальности по Парето.* В рассматриваемом примере оптимальным по Парето решением называется такое число $x_0 \in [0,6]$, что для любого другого числа $x \in [0,6]$, если для одного из городов он лучше, чем x_0, то для другого города он хуже, чем x_0.

Перейдём к рассмотрению многокритериальной задачи принятия решений, поставленной в общем виде. Выбор стратегии x из множества X находится в распоряжении ЛПР. Заданы функции f_i: $X \to R$, $i = 1,\ldots,n$. Цель ЛПР заключается в том, чтобы путём выбора $x \in X$ сделать значение каждого критерия $f_i(x)$ как можно больше. Возникает вопрос о правиле выбора решения x в задаче

$$f_1(x) \to \max, \ldots, f_n(x) \to \max, \ x \in X. \qquad (5.1)$$

Предположение 1. Множество X является компактом в соответствующем метрическом пространстве, а все функции f_i: $X \to R$ являются непрерывными.

Посмотрим на эту многокритериальную задачу с точки зрения выбора стратегии в условиях неопределённых пассивных помех, которыми будем считать индекс $i = 1,\ldots,n$.

В соответствии с критерием Вальда нужно рассмотреть задачу

$$F_1(x) = \min_{1\le i\le n} f_i(x) \to \max,\ x \in X. \tag{5.2}$$

В случае критерия Сэвиджа оптимизационная задача принимает следующий вид:

$$F_2(x) = \max_{1\le i\le n}(\max_{z\in} f_i(z) - f_i(x)) \to \min,\ x \in X. \tag{5.3}$$

Критерий Лапласа рассмотрим в более общем виде. Зафиксируем числа $\lambda_i \ge 0$, $i = 1,\ldots,n$, $\lambda_1 + \ldots + \lambda_n = 1$ и разберём задачу

$$F_3(x) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f_i(x) \to \max,\ x \in X. \tag{5.4}$$

По критерию крайнего оптимизма получим следующую оптимизационную задачу:

$$F_4(x) = \max_{1\le i\le n} f_i(x) \to \max,\ x \in X. \tag{5.5}$$

Зафиксируем число $\nu \in (0,1)$. Тогда по критерию Гурвица

$$F_5(x) = \nu F_4(x) + (1 - \nu)F_1(x)) \to \max, x\in X, \tag{5.6}$$

а по критерию Ходжа — Лемана

$$F_6(x) = \nu F_3(x) + (1 - \nu)F_1(x)) \to \max, x\in X, \tag{5.7}$$

Пример 2. Рассмотрим задачу из примера 1. Имеем

$f_1(x) \to \max, f_2(x) \to \max;$ $f_1(x) = -1 + x$ при $0 \le x \le 1;$

$f_1(x) = -x + 1$ при $1 \le x \le 5;$ $f_1(x) = -9 + x$ при $5 \le x \le 6;$

$f_2(x) = -2 - x$ при $0 \le x \le 2;$ $f_2(x) = -6 + x$ при $2 \le x \le 6.$

На рис. 5.3 графиком функции $f_1(x)$ является ломаная $ABCD$, а ломаная abc задаёт график функции $f_2(x)$.

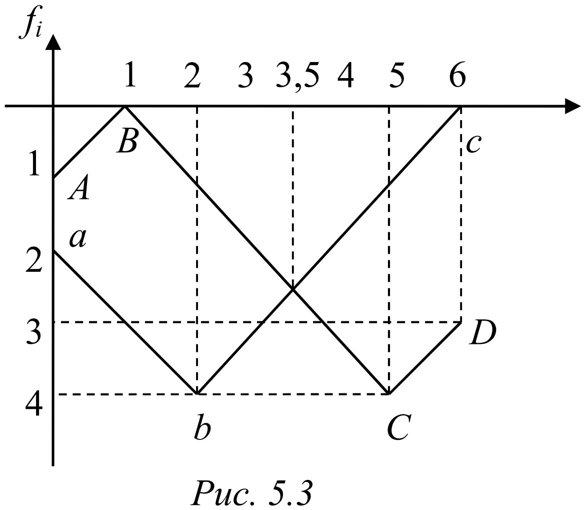

Рис. 5.3

Из этого рисунка видно, что $F_1(x) = \min(f_1(x);f_2(x)) = f_2(x)$ при $0 \le x \le$ $\le 3,5$, а $F_1(x) = f_1(x)$ при $3,5 \le x \le 6$. Отсюда следует, что $x_1 = 0$. Получили точку C.

Далее, $\max\limits_{0 \le x \le 6} f_i(x) = 0$, i = 1,2. Поэтому из формул (5.2) и (5.3) получим $F_2(x) = -F_1(x)$. Следовательно, $x_2 = x_1$.

Зафиксируем числа $\lambda_1 = \varepsilon$, $\lambda_2 = 1 - \varepsilon$, $0 < \varepsilon < 1$ и рассмотрим функцию $F_3(x) = \varepsilon f_1(x) + (1 - \varepsilon) f_2(x)$ при $x \in [0,6]$. Имеем

$$F_3(x) = \varepsilon - 2 + (2\varepsilon - 1)x \quad \text{при } x \in [0,1];$$
$$F_3(x) = 3\varepsilon - 2 - x \quad \text{при } x \in [1,2];$$
$$F_3(x) = -6 + 7\varepsilon + (1 - 2\varepsilon)x \quad \text{при } x \in [2,5];$$
$$F_3(x) = -6 - 3\varepsilon + x \quad \text{при } x \in [5,6].$$

В табл. 5.1 в зависимости от значения параметра ε приведены максимальные значения функции $F_3(x)$ на отрезке [1,6], а также точки x_3, в которых этот максимум достигается. Стало быть, при $\varepsilon = 0{,}5$ на рис. 5.1 получаются все точки отрезка AC и точка B.

Таблица 5.1

Максимальные значения функции $F_3(x)$ на отрезке [1,6]

Значение ε	Значение $\max F_3(x)$					Значение x_3
	$0 \le x \le 1$	$1 \le x \le 2$	$2 \le x \le 5$	$5 \le x \le 6$	$0 \le x \le 6$	
$0 \le \varepsilon < 0{,}5$	$\varepsilon - 2$	$3\varepsilon - 3$	$3\varepsilon - 1$	-3ε	-3ε	6
$\varepsilon = 0{,}5$	–1,5	–1,5	–2,5	–1,5	–1,5	$[0,1] \cup \{6\}$
$0{,}5 < \varepsilon \le 1$	$3\varepsilon - 3$	$3\varepsilon - 3$	$3\varepsilon - 4$	-3ε	$3\varepsilon - 3$	1

По критерию «крайнего оптимизма» $F_4(x) = \max(f_1(x); f_2(x)) = f_1(x)$ при $0 \le x \le 3{,}5$ и $F_1(x) = f_2(x)$ при $3{,}5 \le x \le 6$. Отсюда следует, что $x_6 = \{1;6\}$. Согласно этому подходу, предприятие следует строить либо в городе A, либо в городе B.

Рассмотрим критерий Гурвица. Зафиксируем число $\nu \in (0,1)$. Тогда $F_5(x) = \nu F_4(x) + (1 - \nu)F_1(x)$. Подставляя сюда значение функций $F_4(x)$ и $F_1(x)$, получим, что

$$F_5(x) \begin{cases} \nu - 2 + (2\nu - 1)x \text{ при } 0 \le x \le 1; \\ 3\nu - 2 - x \text{ при } 1 \le x \le 2; \\ 7\nu - 6 + (-2\nu + 1)x \text{ при } 2 \le x \le 3{,}5;. \\ -7\nu + 1 + (2\nu - 1)x \text{ при } 3{,}5 \le x \le 5; \\ 3\nu - 9 + x \text{ при } 0 \le x \le 1. \end{cases}$$

Максимальное значение кусочно-линейной функции $F_5(x)$ достигается в одной из её вершин. Поэтому

$$\max_{0\le x\le 6} F_5(x) = \max(\nu-2;\ 3\nu-3;\ 3\nu-4;-2{,}5;\ 3\nu-4;\ 3\nu-3) =$$

$$= \max(\nu-2;\ 3\nu-3;-2{,}5) = \begin{cases} \nu-2 \text{ при } 0\le\nu\le 0{,}5; \\ 3\nu-3 \text{ при } 0{,}5\le\nu\le 1. \end{cases}$$

Следовательно, $x_5 = 0$ при $0 \le \nu < 0{,}5$, $x_5 = [0;1]$ при $\nu = 0{,}5$ и $x_5 = 1$ при $0{,}5 < \nu \le 1$.

При фиксированном значении число $\nu \in (0{,}1)$. Применим критерий Ходжа — Лемана. Тогда $F_6(x) = \nu F_3(x) + (1-\nu)F_1(x)$. Подставляя сюда значение функций $F_3(x)$ и $F_1(x)$, получим, что

$$F_6(x) = \begin{cases} \nu(\varepsilon-2+(2\varepsilon-1)x)+(1-\nu)(-2-x) \text{ при } 0\le x\le 1; \\ \nu(3\varepsilon-2-x)+(1-\nu)(-2-x) \text{ при } 1\le x\le 2; \\ \nu(-6+7\varepsilon+(1-2\varepsilon)x)+(1-\nu)(-6+x) \text{ при } 2\le x\le 3{,}5; \\ \nu(-6+7\varepsilon+(1-2\varepsilon)x)+(1-\nu)(-x+1) \text{ при } 3{,}5\le x\le 5; \\ \nu(-6+3\varepsilon+x)+(1-\nu)(-9+x) \text{ при } 0\le x\le 1. \end{cases}$$

Максимальное значение кусочно-линейной функции $F_6(x)$ достигается в одной из её вершин. Поэтому

$$\max_{0\le x\le 6} F_6(x) = \max(\nu\varepsilon-2;\ 3\nu\varepsilon-3;\ 3\nu\varepsilon-4;-2{,}5;\ 3\nu-3\nu\varepsilon-4;\ 3\nu-3\nu\varepsilon-3) =$$

$$= \max(\nu\varepsilon-2;\ 3\nu\varepsilon-3) = \begin{cases} \nu\varepsilon-2 \text{ при } 0\le\nu\le 0{,}5; \\ 3\nu\varepsilon-3 \text{ при } 0{,}5\le\nu\le 1. \end{cases}$$

Следовательно, $x_6 = 0$ при $0 \le \nu\varepsilon < 0{,}5$, любое $x_5 \in [0;1]$ при $\nu\varepsilon = 0{,}5$ и $x_5 = 1$ при $0{,}5 < \lambda\varepsilon \le 1$.

Теорема 1. Пусть стратегия $x_S \in X$ является решением одной из задач (5.2)–(5.7). Тогда для любой стратегии $x \in X$ система неравенств

$$f_1(x_S) < f_1(x), \ldots, f_n(x_S) < f_n(x) \tag{5.8}$$

является несовместной.

Доказательство. Предположим, что существует стратегия $x \in X$, для которой система неравенств (5.8) выполнена. Покажем, что $F_i(x_S) < F_i(x)$ при всех $i = 1,3,4,5,6$ и $F_2(x_S) > F_2(x)$.

Из неравенств (5.8) следует, что

$$F_1(x_S) = \min_{1\le i\le n} f_i(x_S) \le f_j(x_S) < f_j(x)$$

$$\text{для } \forall j \in \overline{1,n} \Rightarrow F_1(x_S) < \min_{1\le j\le n} f_i(x) = F_1(x).$$

Умножим каждое неравенство (5.8) на ненулевой набор неотрицательных чисел λ_i и сложим их. Получим $F_3(x_S) < F_3(x)$.

Далее,

$$F_4(x) = \max_{1\le i\le n} f_i(x) \ge f_j(x_S) > f_j(x_S)$$

$$\text{для } \forall j \in \overline{1,n} \Rightarrow F_4(x) > \max_{1\le j\le n} f_j(x) = F_4(x_S).$$

Зафиксируем произвольное число $0 < \nu < 1$. Тогда

$$F_5(x_S) = \nu F_4(x_S) + (1-\nu)F_1(x_S) < \nu F_4(x) + (1-\nu)F_1(x) = F_5(x),$$

$$F_6(x_S) = \nu F_3(x_S) + (1-\nu)F_1(x_S) < \nu F_3(x) + (1-\nu)F_1(x) = F_6(x).$$

Рассмотрим теперь функцию $F_2(x)$. Из неравенств (5.8) следует, что

$$\max_{z\in X} f_i(z) - f_i(x_S) > \max_{z\in X} f_i(z) - f_i(x) \text{ для } \forall i \in \overline{1,n}.$$

Поэтому

$$F_2(x_S) = \max_{1\le i\le n}\left(\max_{z\in X} f_i(z) - f_j(x_S)\right) > \max_{z\in X} f_j(z) - f_j(x) \text{ для } \forall j \in \overline{1,n}.$$

Следовательно, $F_2(x_S) > \max\limits_{1\le j\le n}\max\limits_{1\le j\le n}\left(\max\limits_{z\in X} f_j(z) - f_j(x)\right) = F_2(x)$.

Определение 1. Стратегия $x_S \in X$ называется *максимальной по Слейтеру* в задаче (5.1), если для любой стратегии $x \in X$ система неравенств (5.8) является несовместной.

Замечание 1. Такое определение означает, что не существует другой стратегии $x \in X$, выбрав которую ЛПР улучшило бы значения сразу всех критериев. Л. Гурвиц предложил называть такие стратегии максимальными по Слейтеру [13. С. 35].

Теорема 2. Стратегия $x_S \in X$ является оптимальной по Слейтеру в задаче (5.1) тогда и только тогда, когда

$$\min_{x\in X} F(x, x_S) \ge 0,$$
$$\text{где } F(x, x_s) = \max(f_1(x_S) - f_1(x); \ldots; f_n(x_S) - f_n(x)). \tag{5.9}$$

Доказательство. Пусть выполнено неравенство (5.9). Тогда $F(x,x_s) \ge$ ≥ 0 для любой стратегии $x \in X$. Следовательно, система неравенств (5.8) является несовместной для любой стратегии $x \in X$. Если же система неравенств (5.8) является несовместной для любой стратегии $x \in X$, то, как следует из (5.9), $F(x,x_s) \ge 0$ для любой стратегии $x \in X$. Следовательно, неравенство (5.9) выполнено.

Следствие 1. Пусть стратегия $x_S \in X$ является точкой абсолютного максимума некоторой функции f_j: $X \to R$, $j = \overline{1,n}$. Тогда она является оптимальной по Слейтеру стратегией в задаче (5.1).

Пример 3. В примере 2 число $x = 1$ является точкой абсолютного максимума функции $f_1(x)$ на отрезке [0,6], а функция $f_2(x)$ достигает абсолютного максимума на отрезке [0,6] в точке $x = 6$. Поэтому стратегии

$x_1 = 1$ и $x_2 = 6$ являются оптимальными по Слейтеру. Покажем, что каждое число $x_s \in [0,1]$ является оптимальной по Слейтеру стратегией. В самом деле,

$$f_1(x_S) - f_1(x) = \begin{cases} x_S - x \text{ при } 0 \le x \le 1, \\ -2 + x_S + x \text{ при } 1 \le x \le 5, \\ 8 + x_S - x \text{ при } 5 \le x \le 6, \end{cases}$$

$$f_2(x_S) - f_2(x) = \begin{cases} -x_S + x \text{ при } 0 \le x \le 2, \\ 4 - x_S - x \text{ при } 2 \le x \le 6. \end{cases}$$

Отсюда следует, что

$$F(x, x_s) = \begin{cases} x_S - x \text{ при } 0 \le x \le x_S, \\ -x_S + x \text{ при } x_S \le x \le 2, \\ 4 - x_S - x \text{ при } 2 \le x \le 3 - x_S, \\ -2 + x_S + x \text{ при } 3 - x_S \le x \le 5, \\ 8 + x_S - x \text{ при } 5 \le x \le 6. \end{cases}$$

График этой функции при $x_s = t$ изображён на рис. 5.4.

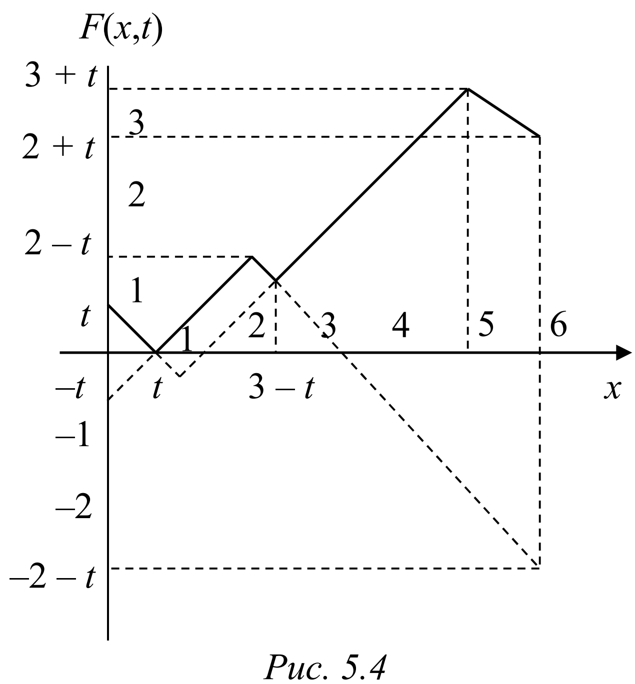

Рис. 5.4

Отсюда видно, что $\min\limits_{0 \le x \le 6} F(x, x_S) = 0$.

Приведём геометрическую интерпретацию оптимальных по Слейтеру стратегий. В пространстве R^n рассмотрим выпуклый открытый конус

$$K_S = \{\overline{\varepsilon} = (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n) \in R^n : \varepsilon_I > 0 \text{ для } \forall i \in \overline{1,n}\}.$$

Тогда определение максимальной по Слейтеру стратегии $x_S \in X$ можно записать в следующем виде:

$$\overline{f}(x) \notin \overline{f}(x_S) + K_S, \quad \forall x \in X; \ \overline{f}(x) = (f_1(x), \ldots, f_n(x)). \qquad (5.10)$$

Множество оптимальных по Слейтеру стратегий в задаче (5.1) будем обозначать X_S.

Придадим условию (5.10) следующую интерпретацию. В пространстве R^n рассмотрим образ множества X при отображении $\overline{f} : X \to R^n$

$$\overline{f}(X) = \left\{ \overline{f}(x) \in R^n : x \in X \right\}. \qquad (5.11)$$

Тогда условие (5.10) равносильно тому, что

$$\left(\overline{f}(x_S) + K_S \right) \cap \overline{f}(X) = \varnothing . \qquad (5.12)$$

Пример 4. В примере 2 множеством (5.11) является ломаная *MNVLF* (см. рис. 5.5), а точками $\overline{f}(x_S)$ являются точка M и все точки отрезка FL. Прообразом точки M является число $x = 6$, а прообразами точек отрезка FL являются числа $x \in [0,1]$. Таким образом, множество $X_S = [0,1] \cup \{6\}$.

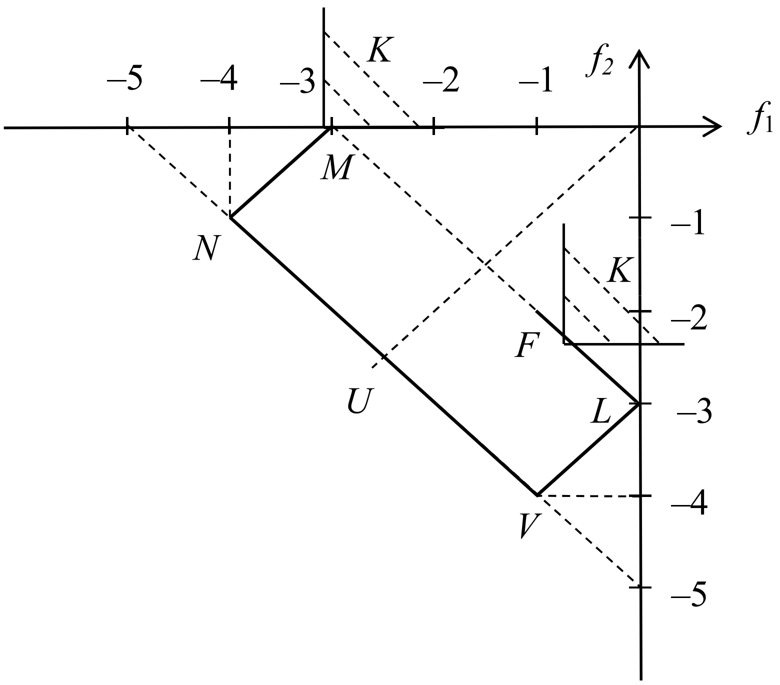

Рис. 5.5

В разобранном примере множество максимальных по Слейтеру точек является непустым, замкнутым и ограниченным. Приведём достаточные условия, при выполнении которых это имеет место всегда.

Теорема 3. При выполнении предположения 1 множество $X_S \subset X$ максимальных по Слейтеру стратегий является непустым компактом.

Доказательство. Функция $F_3(x)$ является непрерывной. По теореме Вейерштрасса, решение в задаче (5.4) существует. Оно будет максимальной по Слейтеру стратегией. Осталось доказать замкнутость множества X_S.

Пусть последовательность стратегий $x_S^{(k)} \in X$ сходится к стратегии x_0. Покажем, что $x_0 \in X_S$. Допустим противное. Тогда существует стратегия $x \in X$, для которой система неравенств $f_1(x_0) < f_1(x),\ldots,f_n(x_0) < f_n(x)$ будет совместной. Поскольку все функции являются непрерывными, то эти неравенства будут выполняться при достаточно больших номерах k при замене x_0 на $x_S^{(k)}$. Получили противоречие.

Как было показано, каждое решение задачи (5.4) является максимальной по Слейтеру стратегией в задаче (5.1). Возникает вопрос: при каких дополнительных условиях каждую максимальную по Слейтеру стратегию в задаче (5.1) можно получить, решая задачу (5.4)?

Рассмотрим в пространстве R^n множество

$$Y = \{\overline{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n) \mid \exists x \in X : f_i(x) > y_i \ \text{ для } \ \forall i = \overline{1,n}\}. \tag{5.13}$$

Это множество не является пустым. В самом деле, для любой точки $x \in X$ набор $y_i = f_i(x) - 1$, $i = \overline{1,n}$ принадлежит множеству Y.

Теорема 4. Пусть множество (5.13) является выпуклым. Тогда, если стратегия x_S является оптимальной по Слейтеру в задаче (5.1), существует такой ненулевой набор неотрицательных чисел λ_i, что

$$\max_{x \in X} \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f_i(x) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f_i(x_S). \tag{5.14}$$

Доказательство. Покажем, что множество

$$Y_* = \{\overline{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n) \mid \exists x \in X : f_i(x) > f_i(x_S) + y_i \ \text{ для } \ \forall i = \overline{1,n}\}. \tag{5.15}$$

является непустым и выпуклым. Поскольку $f_i(x_S) > f_i(x_S) + y_i$ при $y_i < 0$, то любая точка $\overline{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$, у которой все $y_i < 0$, принадлежит множеству Y.

Пусть точки $\overline{y}_*$ и $\overline{z}_*$ из R^n принадлежат множеству Y_*. Тогда точки $\overline{f}(x_s) + \overline{y}_*$ и $\overline{f}(x_S) + \overline{z}_*$ принадлежат выпуклому множеству (5.13). Поэтому

$$\lambda\left(\overline{f}(x_S) + \overline{y}_*\right) + (1-\lambda)\left(\overline{f}(x_S) + \overline{z}_*\right) = \overline{f}(x_S) + \lambda\overline{y}_* + (1-\lambda)\overline{z}_* \in Y$$

при любом числе $\lambda \in [0,1]$. Отсюда и из определения множества (5.13) получим, что существует стратегия $x \in X$ такая, что $f_i(x) > f_i(x_S) + \lambda y_i + (1 - \lambda)z_i$ для любого номера $i = \overline{1,n}$. Стало быть, точка $\lambda\overline{y}_* + (1-\lambda)\overline{z}_* \in Y_*$.

Покажем, что точка $0 \notin Y_*$. Допустим противное. Тогда из (5.15) следует, что найдётся стратегия $x \in X$ такая, что выполнены неравенства (5.8). Получили противоречие.

Для точки 0 и множества Y_* применим теорему об отделимости точки от выпуклого множества. Согласно этой теореме, существует такой ненулевой набор чисел λ_i, $i = \overline{1,n}$, что

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i y_i \leq 0 \text{ для всех } (y_1, y_2, \ldots, y_n) \in Y_*. \tag{5.16}$$

Возьмём любую стратегию $x \in X$ и любое число $\varepsilon > 0$. Тогда $(y_1, y_2, \ldots, y_n) \in Y_*$ при $y_i = f_i(x) - f_i(x_S) - \varepsilon$. Подставим эти числа в неравенство (5.16). Получим

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i f_i(x_S) \geq \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f_i(x) - \varepsilon \sum_{i=1}^{n} \lambda_i.$$

Устремим в этом неравенстве $\varepsilon \to 0$. Будем иметь

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i f_i(x_S) \geq \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f_i(x).$$

Стало быть, равенство (5.14) выполнено.

При любом числе $\varepsilon > 0$ точка $(-\varepsilon, -\varepsilon, \ldots, -1, \ldots, -\varepsilon) \in Y$ (в определении множества Y_* (5.15) нужно взять $x = x_S$). Подставим эти числа в неравенство (5.16). Получим, что

$$-\varepsilon \sum_{k=1, k\neq 1}^{n} \lambda_k - \lambda_i \leq 0.$$

Устремим в этом неравенстве $\varepsilon \to 0$. Будем иметь $\lambda_i \geq 0$.

Следствие 2. Пусть множество X содержится в вещественном линейном пространстве и является выпуклым, а все функции f_i: $X \to R$ являются вогнутыми. Тогда множество (5.13) является выпуклым.

Доказательство. Пусть точки $\overline{y}$ и $\overline{z}$ из R^n принадлежат множеству Y. Тогда найдутся стратегии $x_* \in X$ и $x^* \in X$ такие, что $f_i(x_*) > y_i$ и $f_i(x^*) > z_i$ для любого номера $i = \overline{1,n}$. Возьмём число $\lambda \in (0,1)$. Тогда из предыдущих неравенств следует, что

$$\lambda f_i(x_*) + (1 - \lambda) f_i(x^*) > \lambda y_i + (1 - \lambda) z_i \text{ для любого } i = \overline{1,n}.$$

Поскольку функции $f_i(x)$ являются вогнутыми, то

$$f_i(\lambda x_* + (1 - \lambda) x^*) \geq \lambda f_i(x_*) + (1 - \lambda) f_i(x^*).$$

Отсюда и из предыдущих неравенств получим, что $f_i(\lambda x_* + (1 - \lambda) x^*) > \lambda y_i + (1 - \lambda) z_i$ для любого номера $i = \overline{1,n}$. Следовательно, $\lambda \overline{y} + (1 - \lambda) \overline{z}_* \in Y$.

Упражнение 1. Покажите, что если множество $\bar{f}(X)$ (5.11) является выпуклым, то выпуклым является и множество (5.13).

Максимальная по Слейтеру стратегия не позволяет строго улучшить решение сразу по всем критериям. Рассмотрим максимальные по Парето стратегии.

Определение 2. Стратегия $x_P \in X$ называется максимальной по Парето в задаче (5.1), если для любой стратегии $x \in X$ система неравенств

$$f_1(x_P) \le f_1(x), \ldots, f_n(x_P) \le f_n(x), \tag{5.17}$$

из которых, по крайней мере, одно неравенство строгое, является несовместной.

Множество оптимальных по Парето стратегий обозначим X_P.

Следствие 3. Если стратегия $x_P \in X$ является максимальной по Парето в задаче (5.1), то она является и максимальной по Слейтеру для той же задачи. Стало быть, $X_P \subset X_S$. Для каждой стратегии $x_P \in X_P$ справедлива теорема 4.

Теорема 5. Пусть для некоторого набора чисел $\lambda_i > 0$, $i = \overline{1,n}$ и для некоторой стратегии $x_P \in X$ выполнено неравенство

$$\max_{x \in X} \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f_i(x) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f_i(x_P). \tag{5.18}$$

Тогда стратегия x_P является оптимальной по Парето в задаче (5.1).

Доказательство. Из равенства (5.18) следует, что для любой стратегии $x \in X$ выполнено неравенство

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i f_i(x) \le \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f_i(x_P).$$

Отсюда и из того, что все числа $\lambda_i > 0$, следует, что система неравенств (5.17), из которых, по крайней мере, одно неравенство строгое, является несовместной. Следовательно, стратегия x_P будет максимальной по Парето.

Теорема 6. При выполнении предположения 1 множество $X_P \subset X$ максимальных по Парето стратегий является непустым.

Доказательство. Возьмём числа $\lambda_i > 0$, $i = \overline{1,n}$ и рассмотрим задачу (5.4). Её решение x_P удовлетворяет условию теоремы 5. Следовательно, оно будет максимальной по Парето стратегией.

Приведём геометрическую интерпретацию оптимальных по Парето стратегий. В пространстве R^n рассмотрим выпуклый открытый конус

$$K_P = \{\bar{\varepsilon} = (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n) \in R^n : \varepsilon_i \geq 0 \text{ для } \forall i \in \overline{1,n}, \ \ \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i > 0\}.$$

Тогда определение максимальной по Парето стратегии $x_P \in X$ можно записать в следующем виде:

$$\bar{f}(x) \notin \bar{f}(x_P) + K_P, \ \forall x \in X \Leftrightarrow \left(\bar{f}(x_P) + K_P\right) \cap \bar{f}(X) = \varnothing. \quad (5.19)$$

Пример 5. В примере 2 (см. рис. 5.3) множество $X_P = [0,1] \bigcup \{6\}$.

Следующий пример показывает, что, вообще говоря, $X_P \neq X_S$.

Пример 6. Муж может зарабатывать сумму денег, равную $x_2 \in \in [0,1]$, из которой жена забирает на домашние нужды сумму, равную $x_1 \in [0,1]$. Оставшуюся сумму $x_2 - x_1$ муж тратит на свои нужды. Если $x_1 > x_2$, то муж занимает недостающую сумму $x_1 - x_2$ у знакомых. В результате чего, из-за долга имеющаяся у него сумма $x_2 - x_1$ может оказаться отрицательной. И муж, и жена хотят, чтобы суммы денег, которые у них имеются, были как можно больше. Причём они кооперируются при выборе стратегии.

Обозначим $x = (x_1, x_2)$. Тогда критерии задаются функциями $f_1(x_1,x_2) = = x_1$, $f_2(x_1,x_2) = -x_1 + x_2$.

Множеством X является квадрат $0 \leq x_1 \leq 1$, $0 \leq x_2 \leq 1$.

На рис. 5.6 изображены множество X и его образ $\bar{f}(X)$. Из рис. 5.6 видно, что условию $\left(\bar{f}(x_S) + K_S\right) \cap \bar{f}(X) = \varnothing$ удовлетворяют все точки ломаной ABC. Следовательно, их прообразы (точки ломаной abc) задают множество X_S.

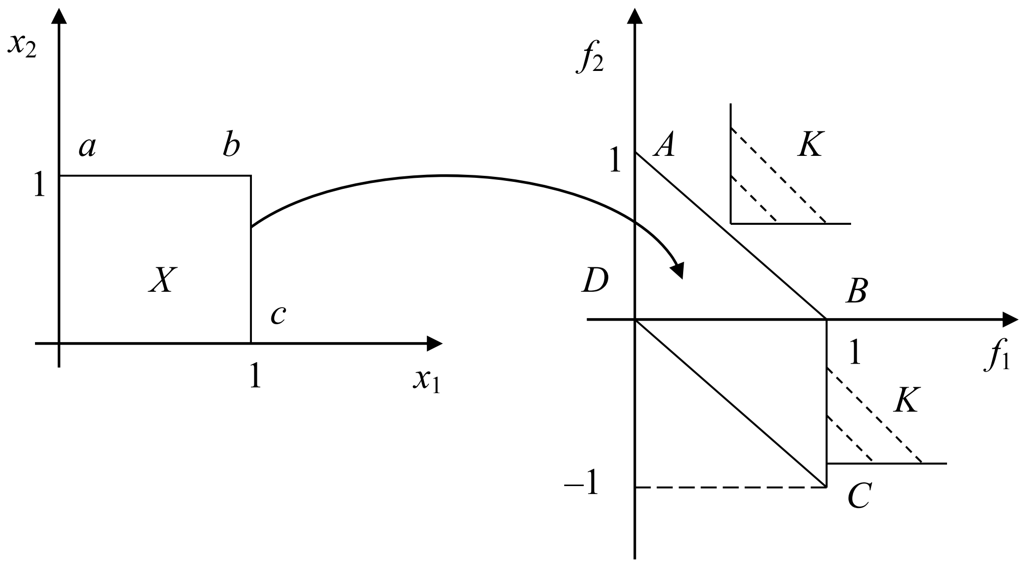

Рис. 5.6

Условию $\left(\overline{f}(x_P)+K_P\right)\cap\overline{f}(X)=\varnothing$ удовлетворяют точки отрезка AB. Поэтому множеством X_P являются точки отрезка ab.

Задача 2. Пусть множество $\overline{f}(X)\subset R^2$ изображено на рис. 5.7. Укажите точки, которые удовлетворяют условиям оптимальности по Слейтеру (5.12) и по Парето (5.19).

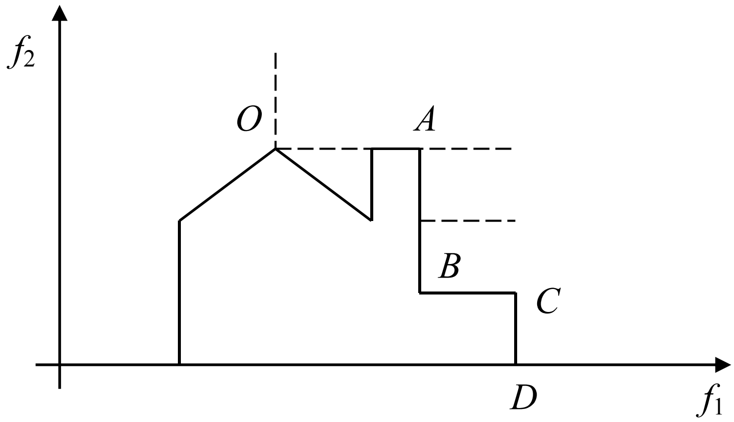

Рис. 5.7

Существуют и другие способы выбора стратегии в задаче (5.1), среди которых отметим лексикографический. Считается, что все критерии упорядочены по важности. Самым важным является первый критерий, задаваемый функцией $f_1(x)$. Следующим по важности является второй критерий с функцией $f_2(x)$ и т. д. Вначале решается задача

$$f_1(x)\to\max,\ x\in X.$$

Обозначим через X_1 множество решений этой задачи. Если множество X_1 состоит из одной точки, то оно принимается за решение задачи (5.1). В противном случае рассматривается задача

$$f_2(x)\to\max,\ x\in X_1,$$

множество решений которой обозначим через X_2. Если множество X_2 состоит из одной точки, то оно принимается за решение задачи (5.1). В противном случае рассматривается задача

$$f_3(x)\to\max,\ x\in X_2$$

и т. д. В результате определяется множество точек $X_Л\subset X$, которые являются максимальными в лексикографическом смысле решениями задачи (5.1).

Пример 7. Рассмотрим задачу из примера 6 и найдём максимальные в лексикографическом смысле стратегии. Решением задачи

$$f_1(x_1,x_2)=x_1\to\max,\quad 0\le x_1\le 1,\ 0\le x_2\le 1$$

является любая точка $(1;x_2)$, $0\le x_2\le 1$. Решая задачу

$$f_2(x_1,x_2)=-x_1+x_2\to\max,\quad x_1=1,\ 0\le x_2\le 1,$$

находим максимальную в лексикографическом смысле стратегию (1;1).

В рассмотренном примере максимальная в лексикографическом смысле стратегия также является максимальной по Парето.

Задача 3. Следует доказать или опровергнуть, что и в общем случае каждая стратегия $x_Л \in X_Л$ является максимальной по Парето (по Слейтеру).

Модификацией лексикографического способа выбора стратегии является метод последовательных уступок. Алгоритм применения выбора стратегии по этому методу следующий:

1) критерии нумеруются в порядке убывания важности;

2) определяется оптимальное значение f_1^* первого критерия; ЛПР устанавливает величину уступок $0 \le \varepsilon_1 \le f_1^*$.

3) решается задача $f_2(x) \to \max, f_1(x) \ge f_1^* - \varepsilon_1, x \in X$.

Далее, пункты 2 и 3 повторяются для критериев $f_2,\ldots, f_n$.

Чтобы показать дальнейший путь обобщения понятия решения в многокритериальной задаче, введём с помощью заданной матрицы

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

у которой все координаты $a_{ij} > 0$, конус

$$K_A = \{\overline{\varepsilon} = (\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_n) \in R^n : \sum_{i=1}^{n} a_{ij}\varepsilon_j \quad \text{для } \forall i \in \overline{1,n}\}.$$

Назовём стратегию $x_A \in X$ максимальной по конусу K_A, если

$$\overline{f}(x) \notin \overline{f}(x_A) + K_A,\ \forall x \in X \Leftrightarrow \left(\overline{f}(x_A) + K_A\right) \cap \overline{f}(X) = \varnothing.$$

Множество максимальных по конусу K_A точек обозначим через X_A. Из неравенств $a_{ij} > 0$ следует включение $K_P \subset K_A$. Отсюда, в частности, следует, что $X_A \subset X_P$.

6. Принятие решения в условиях риска

Рассмотрим случай, когда неконтролируемый фактор $y \in Y$ является случайной величиной с заданным законом распределения. В случае непрерывной случайной величины $y \in Y$ задана плотность вероятности $p(y)$. Если множество Y состоит из конечного числа точек $y_1,\ldots,y_m$, то известны вероятности $P\{y = y_i\} = p_i$. Таким образом, в этом случае задана дискретная случайная величина

Y	y_1	y_2	…	y_n	…
P	p_1	p_2	…	p_n	…

При любом выборе ЛПР стратегии $x \in X$ его выигрыш $f(x,y)$ является случайной величиной. Её математическое ожидание $M(x)$ и дисперсия $\sigma^2(x)$ вычисляются по формулам

$$M(x) = \int\limits_Y f(x,y)p(y)dy,\ \ \sigma^2(x) = \int\limits_Y (f(x,y) - M(x))^2 p(y)dy$$

в случае непрерывной случайной величины, а также

$$M(x) = \sum_{i=1}^{m} f(x,y_i)p_i,\ \ \sigma^2(x) = \sum_{i=1}^{m} (f(x,y_i) - M(x))^2 p_i,$$

если множество Y состоит из конечного числа точек.

Пример 1 (задача о фермере). Пусть за погодой велось наблюдение в течение длительного времени. В результате установлено, что y_1 = {сухая погода} наступает с вероятностью $p_1 = 0{,}3$; y_2 = {нормальная погода} наступает с вероятностью $p_2 = 0{,}5$; y_3 = {дождливая погода} наступает с вероятностью $p_3 = 0{,}2$. Матрица выигрыша фермера имеет вид

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 & 3 \\ 3 & 5 & 2 \\ 0 & 6 & 8 \end{pmatrix}.$$

Фермер выбирает i-ю строку этой матрицы. Для математического ожидания $M(i)$ и для дисперсии $\sigma^2(i)$, $i = 1,2,3$, имеем:

$$M(1) = 4\cdot 0{,}3 + 1\cdot 0{,}5 + 3\cdot 0{,}2 = 2{,}3;$$
$$M(2) = 3\cdot 0{,}3 + 5\cdot 0{,}5 + 2\cdot 0{,}2 = 3{,}8;$$
$$M(3) = 0\cdot 0{,}3 + 6\cdot 0{,}5 + 8\cdot 0{,}2 = 4{,}6;$$
$$\sigma^2(1) = (4 - 2{,}3)^2 \cdot 0{,}3 + (1 - 2{,}3)^2 \cdot 0{,}5 + (3 - 2{,}3)^2 \cdot 0{,}2 =$$
$$= 1{,}81 \Rightarrow \sigma(1) = 1{,}345;$$
$$\sigma^2(2) = (3 - 3{,}8)^2 \cdot 0{,}3 + (5 - 3{,}8)^2 \cdot 0{,}5 + (2 - 3{,}8)^2 \cdot 0{,}2 =$$
$$= 1{,}56 \Rightarrow \sigma(2) = 1{,}249;$$

$\sigma^2(3) = (0 - 4{,}6)^2 \cdot 0{,}3 + (6 - 4{,}6)^2 \cdot 0{,}5 + (8 - 4{,}6)^2 \cdot 0{,}2 =$
$= 9{,}64 \Rightarrow \sigma(3) = 3{,}105.$

Отметим, что среднеквадратичное отклонение $\sigma(x)$ имеет ту же размерность, что и случайная величина и, следовательно, математическое ожидание.

Пример 2. Рассмотрим задачу о диверсификации вклада в смешанных стратегиях. Стратегией ЛПР (вкладчика) является число $0 \le x \le 1$. Его выигрыш задаётся функцией $f(x,y) = Rx + D(1 - x)y$, $0 \le x \le 1$.

Пусть отношение величин курсов валюты y в начале и в конце года является случайной величиной. Считаем, что её функция распределения $p(y)$ неизвестна, но известными являются математическое ожидание m и среднеквадратичное отклонение σ. Следовательно, при любом выборе, сделанном ЛПР, математическое ожидание $M(x)$ и дисперсия $\sigma^2(x)$ равны

$$M(x) = \int_Y (Rx + D(1-x)y)p(y)dy = Rx + D(1-x)m,$$

$$\sigma^2(x) = \int_Y (D(1-x)(y-m))^2 p(y)dy = D^2(1-x)^2\sigma^2.$$

Имеет место неравенство Чебышева [16. С. 58]

$$P\{|f(x,y) - M(x)| > \varepsilon\} \le \frac{\sigma^2(x)}{\varepsilon^2}, \quad \forall \varepsilon > 0. \tag{6.1}$$

На основании этого неравенства можно сделать вывод, что чем меньше среднеквадратичное отклонение $\sigma(x)$, тем меньше доля случайных выигрышей $f(x,y)$, для каждого из которых разница между ним и средним выигрышем $M(x)$ больше по модулю заданного числа. Поэтому величина среднеквадратичного отклонения может служить *мерой риска*.

ЛПР имеет цель сделать как можно больше средний выигрыш и в то же время минимизировать риск. В результате имеем следующую двухкритериальную задачу:

$$f_1(x) = M(x) \to \max, f_2(x) = -\sigma(x) \to \max, x \in X. \tag{6.2}$$

Решение задачи (6.2) определяет максимальные по Парето стратегии $X_P \subset X$.

Пример 3. Рассмотрим задачу о фермере. Нанесём на плоскости (f_1,f_2) точки $K_1 = (M(1); -\sigma(1)) = (2{,}3; -1{,}345)$, $K_2 = (M(2); -\sigma(2)) = (3{,}8; -1{,}249)$; $K_3 = (M(3); -\sigma(3)) = (4{,}6; -3{,}105)$. Из рис. 6.1 видно, что оптимальными по Парето будут точки $K_2 = (3{,}8; -1{,}249)$, $K_3 = (4{,}6; -3{,}105)$. Следовательно, максимальными по Парето являются стратегии $X_P = \{2;3\}$.

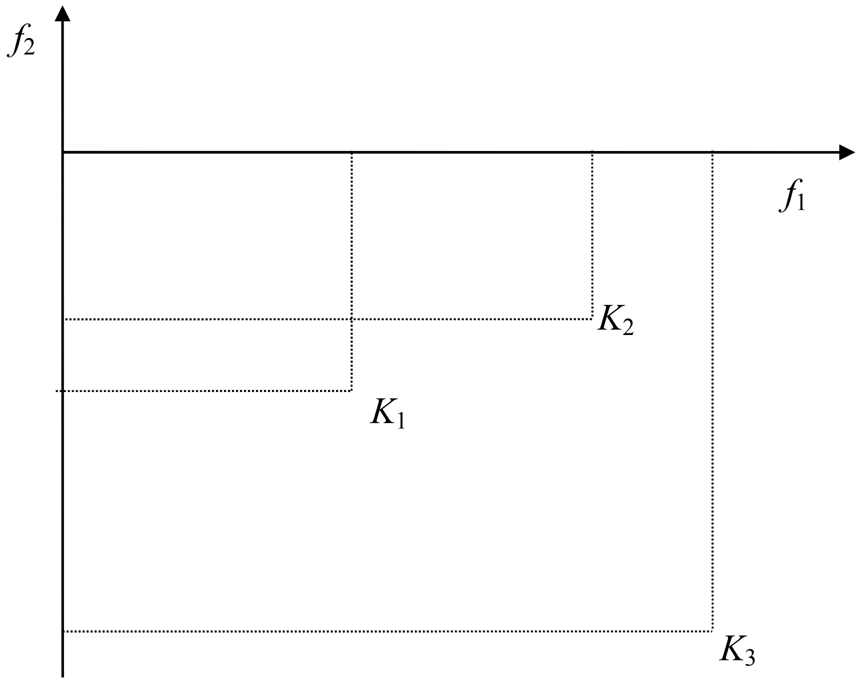

Рис. 6.1

Пример 4. Рассмотрим задачу о диверсификации вклада. Имеем

$$f_1(x) = Rx + D(1 - x)m, \quad f_2(x) = -D(1 - x)\sigma,\ 0 \le x \le 1.$$

На рис. 6.2 и 6.3 на плоскости (f_1, f_2) изображены точки $(M(x),-\sigma(x))$, $0 \le x \le 1$. Как видно из этих рисунков, при $R \ge Dm$ максимальной по Парето является точка $(R,0)$, которая соответствует стратегии $x = 1$. При $R < Dm$ максимальной по Парето является любая точка отрезка, изображённого на рис. 6.4. Следовательно, любой выбор $0 \le x \le 1$, сделанный ЛПР, является максимальным по Парето.

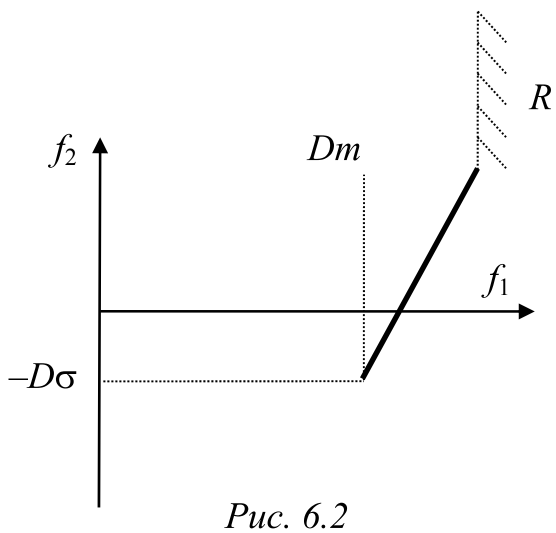

Рис. 6.2

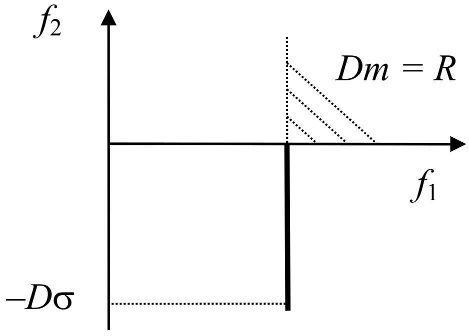

Рис. 6.3

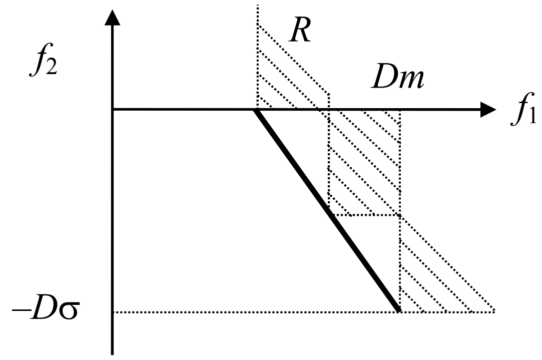

Рис. 6.4

Основная проблема всегда бывает в выборе конкретной стратегии из максимальных по Парето стратегий. Рассмотрим максимальную в лексикографическом смысле стратегию, причём самым важным является первый критерий, задаваемый математическим ожиданием $M(x)$. Этот критерий называется критерием ожидаемого значения

$$M(x) \to \max, x \in X_P. \tag{6.3}$$

Пример 5. Рассмотрим пример 3. По критерию ожидаемого значения наилучшей для фермера будет стратегия $i = 3$. Однако в случае выбора этой стратегии с вероятностью 0,3 может быть нулевой выигрыш. В то время как при выборе, например, стратегии $i = 1$ с этой же вероятностью выигрыш может равняться 4.

Пример 6. Рассмотрим задачу о диверсификации вклада и выберем среди стратегий максимальных по Парето те, которые являются максимальными по критерию ожидаемого значения.

В случае $R \geq Dm$ имеем одну стратегию $x = 1$, максимальную по Парето. Она будет и максимальной по критерию ожидаемого значения. При $R < Dm$ максимальной по критерию ожидаемого значения будет стратегия $x = 0$.

Выбор стратегии по критерию ожидаемого значения связан с большим риском. Чтобы уменьшить риск большего отклонения случайной величины выигрыша от математического ожидания применяют критерий математического ожидания — дисперсии:

$$g(x) = M(x) - \lambda\sigma(x) \to \max, x \in X. \tag{6.4}$$

Здесь число $\lambda > 0$ задано. Выбор стратегии $x \in X$ по критерию (6.4) означает, что производится как увеличение ожидаемого среднего выигрыша $M(x)$, так и уменьшение риска $\sigma(x)$. Число λ характеризует субъективное отношение ЛПР к риску: чем больше λ, тем меньше он склонен к риску. Таким образом, число λ является субъективным показателем осторожности. Решение, получаемое по критерию (6.4), является максимальным по Парето (см. теорему 5 из параграфа 3).

Пример 7. Рассмотрим задачу о фермере. Имеем $g_1 = 2{,}3 - 1{,}345\lambda$, $g_2 = 3{,}8 - 1{,}249\lambda$, $g_3 = 4{,}6 - 3{,}105\lambda$. Очевидно, что при любом числе $\lambda > 0$ выполнено неравенство $g_1 < g_2$. Далее, $g_3 > g_2$ при $0 \le \lambda < 0{,}431$, $g_3 < g_2$ при $\lambda > 0{,}431$. Таким образом, оптимальная по критерию (6.4) стратегия следующая: $i = 3$ при $0 \le \lambda < 0{,}431$ и $i = 2$ при $\lambda > 0{,}431$.

Пример 8. Рассмотрим задачу о диверсификации вклада. Имеем $g(x) = Rx + D(1 - x)m - \lambda D(1 - x)\sigma = (R - Dm + \lambda D\sigma)x + Dm - \lambda D\sigma$, $0 \le x \le 1$.

В случае $R \ge Dm$ имеем одну максимальную по Парето стратегию $x = 1$. Она будет и максимальной по критерию математического ожидания — дисперсии.

Пусть $R < Dm$. Тогда максимальная по критерию математического ожидания — дисперсии стратегия имеет вид

$$x = 0 \text{ при } \lambda < \frac{Dm - R}{D\sigma}; \quad x = 1 \text{ при } \lambda > \frac{Dm - R}{D\sigma}.$$

Оценим вероятность того, что при выбранной стратегии $x \in X$ значение выигрыша $f(x,y)$ будет не меньше найденного значения $g(x)$. Имеем

$$P\{f(x,y) \ge g(x)\} = 1 - P\{f(x,y) < g(x)\} = 1 - P\{f(x,y) < M(x) - \lambda\sigma(x)\} =$$
$$= 1 - P\{\lambda\sigma(x) < M(x) - f(x,y)\} \ge 1 - P\{|f(x,y) - M(x)| > \lambda\sigma(x)\} \ge$$
$$\ge |\text{ по неравенству Чебышева }| \ge 1 - \frac{1}{\lambda^2}.$$

Таким образом, доля случайных выигрышей $f(x,y)$, величина которых не меньше найденного числа $M(x) - \lambda\sigma(x)$, с увеличением показателя осторожности стремится к единице.

Пример 9. Рассмотрим задачу из примера 7 с показателем осторожности $\lambda = 3$. Тогда оптимальной стратегией является $i = 2$ и значение $g_2 = 3{,}8 - 1{,}249 \cdot 3 = 0{,}053$. Следовательно, вероятность того факта, что выигрыш фермера будет не ниже 0,053 (при условии, что он выбирает стратегию $i = 2$) не меньше, чем $1-\frac{1}{9}\approx 0,9$.

Выясним теперь, как в общем случае устанавливает предпочтение критерий математического ожидания — дисперсии. Возьмём две стратегии $x_i \in X$, которым на плоскости $(f_1;f_2)$ соответствуют две разные точки.

Пусть пары $(M(x_1);-\sigma(x_1))$ и $(M(x_2);-\sigma(x_2))$ сравнимы по Парето. Пусть, например, первая пара лучше второй по Парето. Это значит, что выполнены неравенства $M(x_1) \geq M(x_2)$, $-\sigma(x_1) \geq -\sigma(x_2)$, причём в одном из них стоит строгое неравенство. Тогда для любого числа $\lambda > 0$ выполнено неравенство

$$M(x_1) - \lambda\sigma(x_1) > M(x_2) - \lambda\sigma(x_2).$$

В этом случае независимо от субъективного показателя осторожности λ первая стратегия более предпочтительна по критерию математического ожидания — дисперсии, чем вторая стратегия.

Пусть разные пары $(M(x_1);-\sigma(x_1))$ и $(M(x_2);-\sigma(x_2))$ несравнимы по Парето. Тогда $M(x_1) \neq M(x_2)$. В самом деле, пусть $M(x_1) = M(x_2)$. Тогда, например, $\sigma(x_1) < \sigma(x_2)$. Следовательно, стратегия x_1 лучше по Парето стратегии x_2.

Пусть, например, $M(x_1) > M(x_2)$. Тогда $-\sigma(x_1) < -\sigma(x_2)$. Это означает, что в данной ситуации больший ожидаемый средний выигрыш сопровождается большим риском. Видно, что

$$M(x_1)-\lambda\sigma(x_1) > M(x_2)-\lambda\sigma(x_2) \Leftrightarrow \lambda < \frac{M(x_1)-M(x_2)}{\sigma(x_1)-\sigma(x_2)}; \qquad (6.5)$$

$$M(x_1)-\lambda\sigma(x_1) < M(x_2)-\lambda\sigma(x_2) \Leftrightarrow \lambda > \frac{M(x_1)-M(x_2)}{\sigma(x_1)-\sigma(x_2)}. \qquad (6.6)$$

Рассмотрим две максимальные по Парето стратегии $x_i \in X$. Тогда пары $(M(x_1);-\sigma(x_1))$ и $(M(x_2);-\sigma(x_2))$ несравнимы по Парето. Поэтому предпочтение между ними по критерию математического ожидания — дисперсии зависит от того, какое из неравенств (6.5) или (6.6) выполнено. Положим

$$\lambda_0 = \inf\frac{M(x_i)-M(x_k)}{\sigma(x_i)-\sigma(x_k)}, \quad \lambda^0 = \sup\frac{M(x_i)-M(x_k)}{\sigma(x_i)-\sigma(x_k)}.$$

Здесь нижняя и верхняя границы берутся по всем максимальным по Парето парам. Тогда, если у ЛПР его субъективный показатель осторожности $\lambda < \lambda_0$, то для него ранжирование Парето-максимальных стратегий по критерию ожидаемого значения (6.3) совпадает с ранжированием по критерию математического ожидания — дисперсии (6.4). Если же у ЛПР его субъективный показатель осторожности $\lambda > \lambda^0$, то для него ранжирование Парето-максимальных стратегий по критерию математического ожидания — дисперсии (6.4) совпадает с ранжированием по показателю риска $\sigma(x)$. Более предпочтительнее та стратегия, у которой меньше показатель риска $\sigma(x)$.

Число λ_0 называется нижней границей несклонности к риску, а число λ^0 — верхней границей несклонности к риску.

Пример 10. Рассмотрим задачу с фермером и вычислим нижнюю и верхнюю границы несклонности к риску. В этом примере максимальными по Парето являются две точки (3,8; –1,249) и (4,6; –3,105). Поэтому

$$\lambda_0 = \lambda^0 = \frac{4,6-3,8}{3,105-1,249} = 0,431.$$

Пример 11. Рассмотрим задачу о диверсификации вклада. При $R \geq Dm$ имеется только одна максимальная по Парето точка $(R,0)$.

Пусть $R < Dm$. Тогда все точки являются максимальными по Парето. Имеем

$$\frac{M(x_i)-M(x_k)}{\sigma(x_i)-\sigma(x_k)} = \frac{Rx_i + D(1-x_i)m - Rx_k - D(1-x_k)m}{D(1-x_i)\sigma - D(1-x_k)\sigma} = \frac{Dm-R}{D\sigma}.$$

Следовательно, $\lambda_0 = \lambda^0 = \dfrac{Dm-R}{D\sigma}$.

Изучим вопрос об уменьшении риска путём применения смешанной стратегии. Будем считать, что множество стратегий $X = \{x_1,\ldots,x_n\}$. Обозначим $M_i = M(x_i)$, $\sigma_i = \sigma(x_i)$. Рассмотрим смешанную стратегию

$$\nu = \{\nu_1,\ldots,\nu_n\}, \nu_i \geq 0, \quad i = \overline{1,n}, \ \sum_{i=1}^{n} \nu_i = 1. \tag{6.7}$$

При применении смешанной стратегии (6.7) выигрышем будет являться случайная величина $\varphi(\nu, y) = \sum_{i=1}^{n} \nu_i f(x_i, y)$. Её математическое ожидание и дисперсия равны

$$M(\nu) = \sum_{i=1}^{n} \nu_1, M_i, ..., \sigma^2(\nu) = M\left(\left(\sum_{i=1}^{n} \nu_i (f(x_i, y) - M_i)\right)^2\right) = \sum_{i,j=1}^{n} \nu_i \nu_j V_{ij}. \tag{6.8}$$

Здесь обозначено $V_{ij} = M((f(x_i,y) - M_i)(f(x_j,y) - M_j))$. Эти числа называются *показателями ковариации* случайных величин $f(x_i,y)$ и $f(x_j,y)$. Введём в рассмотрение коэффициенты корреляции между этими случайными величинами $r_{ij} = \dfrac{V_{ij}}{\sigma_i\sigma_j}$. Отметим, что $|\, r_{ij}\,| \le 1$, $r_{ij} = r_{ji}$ и $r_{ii} = 1$.

Имеем равенства $V_{ij} = r_{ij}\sigma_i\sigma_j$. Тогда из второй формулы (6.8) получим, что среднеквадратичное отклонение случайной величины $\varphi(\nu,y)$ равно

$$\sigma(\nu) = \sqrt{\sum_{i,j=1}^{n} r_{ij}(\nu_i\sigma_i)(\nu_j\sigma_j)}. \tag{6.9}$$

Используем полученные формулы для выяснения целесообразности применения смешанных стратегий. Рассмотрим критерий ожидаемого значения. Пусть, например, $M_1 \ge M_i$ для всех $i = \overline{2,n}$. Тогда из первой формулы (6.8) следует, что для любой смешанной стратегии $M(\nu) \le \sum_{i=1}^{n} \nu_i M_1 = M_1$. Стало быть, применение смешанной стратегии не даёт улучшение по критерию ожидаемого значения.

Оценим теперь величину риска $\sigma(\nu)$ при применении смешанной стратегии. Рассмотрим три случая.

Случай 1. Пусть случайные величины $f(x_i,y)$ и $f(x_j,y)$ являются попарно некоррелированными, то есть коэффициенты корреляции между этими случайными величинами $r_{ij} = 0$ при всех $i \ne j$. В этом случае из формулы (6.9) получим, что

$$\sigma^2(\nu) = \sum_{i=1}^{n} (\nu_i\sigma_i)^2. \tag{6.10}$$

Пусть $\sigma_1 > 0$ и $\sigma_1 > 0$. Возьмём смешанную стратегию

$$\nu_1^* = \frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}, \quad \nu_2^* = \frac{\sigma_1^2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}, \quad \nu_1^* = 0, \quad i = \overline{3,n}. \tag{6.11}$$

Тогда из формулы (6.10) получим, что

$$\sigma^2(\nu^*) = \frac{\sigma_1^2\sigma_2^2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2} < \sigma_i^2, \; i = 1,2.$$

Поэтому, если $M_1 = M_2$, то смешанная стратегия (6.11) даёт меньшую величину риска, чем каждая из чистых стратегий x_1 и x_2. При этом величина ожидаемого значения $M(\nu^*) = M_1$.

Отметим ещё одно свойство смешанных стратегий в рассматриваемом случае. Пусть все среднеквадратичные отклонения σ_i ограничены сверху одним и тем же числом $\sigma^* > 0$. Возьмём равномерно распределённую смешанную стратегию $\nu_i^{(n)} = 1/n$, $i = \overline{1,n}$. Тогда из формулы

(6.10) получим, что $\sigma(\nu^{(n)}) \le \frac{\sigma^*}{\sqrt{n}}$. Стало быть, применение равномерно распределённой смешанной стратегии приводит к тому, что при $n \to \infty$ величина риска стремится к нулю. Ожидаемое значение $M(\nu^{(n)}) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} M_i$. Заметим, что если $M_i \to M$ при $i \to \infty$, то $M(\nu^{(n)}) \to M$ при $n \to \infty$.

В самом деле, из условия $M_i \to M$ при $i \to \infty$ следует, что для любого числа $\varepsilon > 0$ найдётся номер N такой, что $| M_i - M | < \varepsilon$ для всех номеров $i > N$. Отсюда следует, что

$$\left|M(\nu^{(n)}) - M\right| \le \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{N-1}\left|M_i - M\right| + \frac{n-N}{n}\varepsilon < 2\varepsilon \text{ для всех } n > \frac{1}{\varepsilon}\sum_{i=1}^{N-1}\left|M_i - M\right|.$$

Случай 2. Рассмотрим случай полной корреляции случайных величин $f(x_i,y)$ и $f(x_j,y)$. Тогда все коэффициенты корреляции между этими случайными величинами $r_{ij} = 1$. В этом случае из формулы (6.9) получим, что

$$\sigma(\nu) = \sqrt{\sum_{i,j=1}^{n}(\nu_i\sigma_i)(\nu_j\sigma_j)} = \sqrt{\left(\sum_{i=1}^{n}\nu_i\sigma_i\right)^2} = \sum_{i=1}^{n}(\nu_i\sigma_i).$$

Отсюда видно, что чистая стратегия, на которой достигается минимальное значение среднеквадратичного отклонения σ_i, даёт меньшую величину риска, чем смешанная стратегия.

Случай 3. Рассмотрим случай полной обратной корреляции случайных величин $f(x_i,y)$ и $f(x_j,y)$. Тогда все коэффициенты корреляции между этими случайными величинами $r_{ij} = -1$ при всех $i \ne j$. Пусть $\sigma_1 > 0$ и $\sigma_2 > 0$. Возьмём следующую смешанную стратегию:

$$\nu_1 = \frac{\sigma_2}{\sigma_1 + \sigma_2},\ \ \nu_2 = \frac{\sigma_1}{\sigma_1 + \sigma_2},\ \ \nu i = 0,\ \ i = \overline{3,n}.$$

Для этой смешанной стратегии подкоренное выражение в формуле (6.9) равно $(\nu_1\sigma_1)^2 + (\nu_2\sigma_2)^2 - 2(\nu_1\sigma_1)(\nu_2\sigma_2) = 0$. Стало быть, в рассматриваемом случае риск может быть полностью исключён с помощью применения смешанной стратегии.

Рассмотрим случай, когда ЛПР выбирает свою стратегию исходя из *критерия максимальной вероятности достижения значения выигрыша не меньше заданной величины*.

Пусть ЛПР устраивает величина выигрыша не меньше заданной величины F. Стратегия x выбирается ЛПР исходя из условия максимизации вероятности $\alpha(x) = P\{f(x,y) \ge F\}$.

Рассмотрим случай, когда $f(x,y) = \varphi(x) + y\psi(x)$. Здесь $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ — заданные функции, а y — случайная величина. Считаем, что $\psi(x) \ge 0$.

Вычислим вероятность $\alpha(x) = P\{\varphi(x) + y\psi(x) \ge F\}$. При $\psi(x) = 0$ эта вероятность равна

$$\alpha(x) = \begin{cases} 1, \text{ если } \varphi(x) \ge F, \\ 0, \text{ если } \varphi(x) < F. \end{cases}$$

Если $\psi(x) > 0$, то

$$\alpha(x) = P\left\{ y \ge \frac{F - \varphi(x)}{\psi(x)} \right\}.$$

Поэтому задача о максимизации вероятности $\alpha(x)$ сводится к решению двух следующих задач:

$$\psi(x) = 0 \text{ при } \varphi(x) \ge F, \tag{6.12}$$

или

$$\frac{F - \varphi(x)}{\psi(x)} \to \min \quad \text{при } \psi(x) > 0. \tag{6.13}$$

Пример 12. Рассмотрим задачу о диверсификации вклада. Имеем $\psi(x) = D(1 - x)$, $\varphi(x) = Rx$.

Зафиксируем число F. Пусть $R \ge F$. Тогда стратегия $x = 1$ является решением задачи (6.12), и она обеспечивает равенство $\alpha(x) = 1$.

Пусть $R < F$. В этом случае задача (6.12) не имеет решения. Задача (6.13) принимает следующий вид:

$$\beta(x) = \frac{F - Rx}{D(1 - x)} \to \min \text{ при } 0 \le x < 1.$$

Производная $\beta'(x) = \dfrac{(F - R)D}{D^2(-x)^2} > 0$. Поэтому минимальное значение достигается при $x = 0$.

Пример 13. Пусть фирма закупает сырьё в количестве x единиц по цене a денежных единиц за единицу сырья, производит из него bx^k единиц готовой продукции, которую затем она реализует на рынке по цене c денежных единиц за единицу готовой продукции. Чистая прибыль фирмы равняется $cbx^k - ax$. Будем считать, что цена на рынке на готовую продукцию носит случайный характер. Поэтому случайной величиной является $y = cb$. Тогда чистая прибыль фирмы носит случайный характер и равняется

$$f(x,y) = -ax + yx^k. \tag{6.14}$$

Считаем, что степень $0 < k < 1$. Задача (6.12) имеет только одно решение $x = 0$ и только при $F = 0$.

Пусть $F > 0$. Запишем задачу (6.13)

$$\beta(x) = \frac{F+ax}{x^k} \to \min \text{ при } x > 0.$$

Производная функции $\beta(x)$ равна

$$\beta'(x) = \frac{ax^k - (F+ax)kx^{k-1}}{x^{2k}} = \frac{ax-(F+ax)k}{x^{k+1}} = \frac{ax(1-k)-Fk}{x^{k+1}}.$$

Отсюда видно, что производная $\beta'(x)$ обращается в нуль при

$$x_* = \frac{Fk}{(1-k)a}. \tag{6.16}$$

Далее, $\beta'(x) < 0$ при $x < x_*$ и $\beta'(x) > 0$ при $x > x_*$. Следовательно, решением задачи (6.15) является число (6.16).

Задача 1. Допустим, что в примере 13 известны математическое ожидание и среднеквадратичное отклонение случайной величины $y = cb$. Найдите максимальные по Парето решения в двухкритериальной задаче (6.2) и решите задачу (6.4).

7. Принятие решения в условиях конфликта

Имеются задачи, в которых значение $y \in Y$ выбирает другая сторона, имеющая цель, противоположную цели ЛПР. Примером такой задачи может служить конкуренция двух фирм, поставляющих на рынок одинаковые товары. Теоретическую основу решения таких задач даёт математическая теория антагонистических игр.

Первая попытка создания математической теории игр была предпринята Эмилем Борелем в 1921 г. В 1928 г. Джон фон Нейман доказал основную теорему математической теории антагонистических игр — теорему о минимаксе. Однако эта теория привлекла к себе пристальное внимание лишь после опубликования в 1944 г. труда Джона фон Неймана и Оскара Моргенштерна «Теория игр и экономное поведение».

Основные понятия теории антагонистических игр двух лиц. Заданы два множества X и Y произвольной структуры и функция f: $X \times Y \to R$. Первый игрок выбирает стратегию $x \in X$, второй — $y \in Y$. Ни один из игроков не знает о выборе противника. Первый игрок получает в качестве выигрыша число $f(x,y)$. Выигрышем второго является число $(-f(x,y))$. Следовательно, проигрышем первого игрока является число $(-f(x,y))$, а проигрышем второго — число $f(x,y)$. Каждый из игроков стремится сделать свой выигрыш как можно больше и, следовательно, минимизировать свой проигрыш. Стало быть, цель первого игрока заключается в максимизации значения функции $f(x,y)$, а цель второго игрока — в минимизации этого значения. Получаем антагонистическую игру, которая записывается следующим образом: $\Gamma = \{X, Y, f(x,y)\}$.

Возникает вопрос об определении приемлемых для игроков правил принятия решений.

Определение 1. Пара стратегий $(x_0,y_0) \in X \times Y$ называется *седловой точкой* функции $f(x,y)$ на множестве $X \times Y$, если

$$f(x,y_0) \le f(x_0,y_0) \le f(x_0,y),\ \forall\, x \in X,\ \forall\, y \in Y. \qquad (7.1)$$

Поясним это определение с точки зрения поведения игроков. Если первый игрок сделает любой выбор $x \neq x_0$, а второй делает выбор y_0, то выигрыш первого игрока может только уменьшиться. Аналогично для любого выбора $y \neq y_0$ второго игрока его проигрыш (при условии, что первый игрок выбирает x_0) может только увеличиться. Таким образом, первому (второму) игроку не выгодно делать выбор, отличный от x_0 (отличный от y_0).

Пример 1. Пусть $X = Y = R$, а $f(x,y) = -x^2 + y^2$. Тогда $f(x,0) = -x^2 \le 0 = f(0,0) \le y^2 = f(0,y)$. Следовательно, точка (0,0) является седловой точкой для этой функции.

Пример 2. Пусть $X = Y = R$, а $f(x,y) = x^2 + y^2$. Допустим, что точка (x_0,y_0) является седловой точкой. Тогда неравенство (7.1) принимает вид $x^2 + y_0^2 \le x_0^2 + y_0^2 \le x_0^2 + y^2$ для любых $\forall\, x \in R$, $\forall\, y \in R$. Отсюда получим заведомо невыполнимое неравенство $x^2 \le x_0^2$ для любых $\forall\, x \in R$. Стало быть, в рассматриваемом примере нет седловой точки.

Определение 2. Антагонистическая игра $\Gamma = \{X, Y, f(x,y)\}$ имеет решение, если функция $f(x,y)$ имеет седловую точку на множестве $X\times Y$.

Теорема 1. Если функция $f(x,y)$ имеет две седловые точки (x_0,y_0) и (x^0,y^0) на множестве $X\times Y$, то

$$f(x_0,y_0) = f(x^0,y^0). \tag{7.2}$$

Доказательство. Запишем неравенство (7.1) для точки (x^0,y^0). Будем иметь

$$f(x,y^0) \le f(x^0,y^0) \le f(x^0,y),\ \forall\, x \in X,\ \forall\, y \in Y.$$

Из этих соотношений и из неравенства (7.1) получим, что

$$f(x^0,y^0) \le f(x^0,y_0) \le f(x_0,y_0) \le f(x_0,y^0) \le f(x^0,y^0).$$

Отсюда следует требуемое равенство (7.2).

Определение 3. Пусть антагонистическая игра $\Gamma = \{X, Y, f(x,y)\}$ имеет решение, а (x_0,y_0) — седловая точка функции $f(x,y)$ на множестве $X\times Y$. Тогда число $\nu = f(x_0,y_0)$ называется *значением игры*.

Пример 3. В примере 1 значением игры является число $\nu = 0$.

При рассмотрении антагонистических игр двух лиц возникают вопросы о существовании решения игры и, если решение существует, об отыскании седловой точки.

Рассмотрим игру Γ с точки зрения первого (второго) игрока и применим критерий гарантированного результата. Считаем, что выполнено предположение 1 из параграфа 1. Тогда определены функции

$$F_+(x) = \min_{y\in Y} f(x,y),\quad F^+(y) = \max_{x\in X} f(x,y). \tag{7.3}$$

Согласно теореме 1 из параграфа 1 эти функции являются непрерывными. Поэтому определены числа

$$\max_{x\in X} F_+(x) = \nu_+,\quad \min_{y\in Y} F^+(y) = \nu^+. \tag{7.4}$$

Применяя критерий гарантированного результата, первый игрок выбирает стратегию $x_+ \in X$ такую, что

$$\max_{x\in X} F_+(x) = F_+(x_+) = \nu_+. \tag{7.5}$$

Аналогично второй игрок выбирает стратегию $y^+ \in Y$ такую, чтобы

$$\min_{y \in Y} F^+(y) = F^+(y^+) = \nu^+. \qquad (7.6)$$

Определение 4. Стратегии $x_+ \in X$ первого игрока и $y^+ \in Y$ второго игрока называются, соответственно, *максиминной* и *минимаксной стратегиями*. Числа ν_+ и ν^+, определяемые равенствами (7.5) и (7.6), называются, соответственно, *нижним* и *верхним значениями игры* Г.

Теорема 2. В антагонистической игре Г выполнено неравенство

$$\nu_+ \le \nu^+. \qquad (7.7)$$

Доказательство. Для любых фиксированных $x_1 \in X$, $y_1 \in Y$ выполнены неравенства

$$\min_{y \in Y} f(x_1, y) \le f(x_1, y) \le \max_{x \in X}(x_1, y).$$

Поэтому

$$\min_{y \in Y} f(x_1, y) \le \min_{y_1 \in Y} \max_{x \in X} f(x, y_1) = \nu^+.$$

Следовательно,

$$\nu_+ = \max_{x_1 \in X} \min_{y \in Y} f\left(x_1, y\right) \le v^+.$$

Теорема 3. Для того чтобы в антагонистической игре Г существовало решение, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось равенство $\nu_+ = \nu^+$, то есть

$$\max_{x \in X} \min_{y \in Y} f(x, y) = \min_{y \in Y} \max_{x \in X} f(x, y). \qquad (7.8)$$

Доказательство. Пусть существует седловая точка. Тогда из неравенства (7.1) получим, что

$$\max_{x \in X} f(x, y_0) \le f(x_0, y_0) \le \min_{y \in Y} f(x_0, y). \qquad (7.9)$$

Отсюда следует, что

$$\nu^+ = \min_{y \in Y} \max_{x \in X} f(x, y) \le f(x_0, y_0) \le \max_{x \in X} \min_{y \in Y} f(x, y) = \nu_+.$$

Из этих соотношений и из неравенства (7.7) следует равенство (7.8).

Пусть выполнено равенство (7.8). Покажем, что максиминная и минимаксная стратегии (x_+, y^+) являются седловой точкой. Обозначим общее значение $\nu_+ = \nu^+ = \nu$. Тогда из формул (7.3)–(7.6) получим, что

$$\min_{y \in Y} f(x_+, y) = \nu = \max_{x \in X} f(x, y^+).$$

Следовательно, $f(x, y^+) \le \nu \le f(x_+, y)$ для любых $x \in X$ и $y \in Y$. Полагая в этом неравенстве $x = x_+$, $y = y^+$, получим, что $\nu = f(x_+, y^+)$. Стало быть, имеем

$$f(x, y^+) \le f(x_+, y^+) \le f(x_+, y), \ \forall\, x \in X \text{ и } \forall\, y \in Y.$$

Таким образом, стратегия (x_+, y^+) является седловой точкой.

Замечание 1. Обозначим через X_+ множество максиминных стратегий первого игрока, а через Y^+ — множество минимаксных стратегий второго игрока. Тогда, если выполнено равенство (7.8), множество седловых точек функции $f(x,y)$ на множестве $X \times Y$ совпадает с множеством $X_+ \times Y^+$. В самом деле, как только что было доказано, каждая точка $(x_+,y^+) \in X_+ \times Y^+$ является седловой. Нужно показать, что если точка (x_0,y_0) является седловой, то $(x_0,y_0) \in X_+ \times Y^+$. Из неравенства (7.9) имеем, что

$$\nu = \nu^+ \le F^+(y_0) \le f(x_0,y_0) \le F_+(x_0) \le \nu_+ = \nu.$$

Следовательно, $F_+(x_0) = \nu = \nu_+$ и $F^+(y_0) = \nu = \nu^+$. Это значит, что точка x_0 является максиминной стратегией первого игрока, а точка y_0 — минимаксной стратегией второго игрока. Стало быть, $(x_0,y_0) \in \in X_+ \times Y^+$.

Приведём достаточные условия существования седловой точки функции двух переменных. Нам потребуется следующая лемма.

Лемма 1. Пусть каждое из множеств X и Y является компактом метрического пространства, а функция f: $X \times Y \to R$ — непрерывной. Пусть при каждом $x \in X$ множество $Y(x) = \{y \in Y\colon f(x,y) = = F_+(x)\}$ состоит из единственной точки $y(x)$. Тогда эта функция $y(x)$ является непрерывной.

Доказательство. Возьмём из множества X последовательность точек $x_n \to x_*$. Покажем, что если $y(x_n) \to y_*$, то $y_* = y(x_*)$.

Переходя в равенстве $F_+(x_n) = f(x_n,y(x_n))$ к пределу и учитывая непрерывность функций $F_+(x)$ и $f(x,y)$, получим $F_+(x_*) = f(x_*,y_*)$. Стало быть, $y_* \in Y(x_*)$. Используя условие единственности, получим требуемое равенство.

Теорема 4 [4. С. 15–16]. Пусть множества X и Y являются выпуклыми компактами в линейных нормированных пространствах E_X и E_Y. Пусть непрерывная функция f: $X \times Y \to R$ при любом $y \in Y$ вогнута по x и при любом $x \in X$ выпукла по y. Пусть существует непрерывная строго выпуклая функция g: $Y \to R$. Тогда функции $f(x,y)$ имеет седловую точку на множестве $X \times Y$.

Доказательство. Рассмотрим вначале случай, когда функция $f(x,y)$ является строго выпуклой по y при каждом $x \in X$. Это значит, что для любых точек $y_1 \ne y_2$ из множества Y и для любого числа $\lambda \in (0,1)$ выполнено неравенство

$$f(x,\lambda y_1 + (1-\lambda)y_2) < \lambda f(x,y_1) + (1-\lambda)f(x,y_2).$$

Покажем, что для строго выпуклой функции множество $Y(x)$ состоит из единственной точки $y(x)$. В самом деле, пусть для пары точек

$y_1 \neq y_2$ из множества Y имеет место равенство $f(x,y_1) = f(x,y_2) = F_+(x)$. Тогда в точке $y_* = 0{,}5y_1 + 0{,}5y_2$ выполнено противоречивое неравенство

$$F_+(x) \leq f(x,y_*) < 0{,}5f(x,y_1) + 0{,}5f(x,y_2) = F_+(x).$$

Функции $F_+(x)$ и $y(x)$ являются непрерывными на множестве X. Пусть в точке $x_* \in X$ выполнено равенство $F_+(x_*) = \max\limits_{x \in X} F_+(x)$. Покажем, что точка $(x_*,y(x_*))$ является седловой точкой функции $f(x,y)$. Возьмём любую точку $x \in X$ и любое число $\lambda \in (0,1)$. Тогда $F_+(x_*) \geq$ $\geq F_+(\lambda x + (1 - \lambda)x_*)$. Из определений функций $F_+(x)$ и $y(x)$ следует, что

$$F_+(\lambda x + (1 - \lambda)x_*) = f(\lambda x + (1 - \lambda)x_*,y(\lambda x + (1 - \lambda)x_*)).$$

Следовательно, используя вогнутость по x функции $f(x,y)$, получим, что

$$F_+(x_*) \geq \lambda f(x,y(\lambda x + (1 - \lambda)x_*)) + (1 - \lambda)f(x_*,y(\lambda x + (1 - \lambda)x_*).$$

Далее, $f(x_*,y(\lambda x + (1 - \lambda)x_*) \geq F_+(x_*)$. Поэтому

$$F_+(x_*) \geq \lambda f(x,y(\lambda x + (1 - \lambda)x_*)) + (1 - \lambda)F_+(x_*).$$

Следовательно, $F_+(x_*) \geq f(x,y(\lambda x + (1 - \lambda)x_*))$. Устремим число $\lambda \to +0$. Получим неравенство $F_+(x_*) \geq f(x,y(x_*))$, $\forall\ x \in X$. Из этого неравенства следует условие седловой точки

$$f(x,y(x_*)) \leq F_+(x_*) = f(x_*,y(x_*)) \leq f(x_*,y),\ \forall\ x \in X,\ \forall\ y \in Y.$$

Рассмотрим теперь общий случай. Для любого числа $n = 1,2,\ldots$ рассмотрим функцию

$$f_n(x,y) = f(x,y) + \frac{1}{n}g(y).$$

Эта функция является строго выпуклой по y. Поэтому она имеет седловую точку (x_n,y_n):

$$f_n(x,y_n) \leq f_n(x_n,y_n) \leq f_n(x_n,y),\ \forall\ x \in X,\ \forall\ y \in Y.$$

Можно считать, что $(x_n,y_n) \to (x_0,y_0) \in X \times Y$ при $n \to \infty$ (иначе можно перейти к сходящейся подпоследовательности). Тогда, переходя в предыдущем неравенстве к пределу, получим

$$f(x,y_0) \leq f(x_0,y_0) \leq f(x_0,y),\ \forall\ x \in X,\ \forall\ y \in Y.$$

Следовательно, точка (x_0,y_0) является седловой точкой функции $f(x,y)$.

Замечание 2. В случае, когда пространство $E_Y = R^s$, функция $g(y) =$ $(y^{(1)})^2 + (y^{(2)})^2 + \ldots + (y^{(s)})^2$ является строго выпуклой. Здесь обозначено $y = (y^{(1)},y^{(2)},\ldots,y^{(s)}) \in R^s$.

Матричные игры. Рассмотрим теперь случай, когда каждый из игроков имеет конечное число стратегий. Тогда множества $X = \{x_1,\ldots,x_m\}$ и $Y = \{y_1,\ldots,y_n\}$. Обозначим $a_{ij} = f(x_i,y_j)$. В этом случае игра определяется матрицей

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & .... & a_{1j} & .... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & .... & a_{2j} & .... & a_{2n} \\ .... & .... & .... & .... & .... & .... \\ a_{i1} & a_{i2} & .... & a_{ij} & .... & a_{in} \\ .... & .... & .... & .... & .... & .... \\ a_{m1} & a_{m2} & .... & a_{mj} & .... & a_{mn} \end{pmatrix}. \qquad (7.10)$$

Первый игрок выбирает i-ю строку, а второй игрок выбирает j-й столбец. Выигрышем первого игрока является число a_{ij}. Это же число является проигрышем второго игрока.

Пример 4. Рассмотрим игру, матрица которой имеет следующий вид:

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -2 & -2 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Первый игрок выбирает строку, а второй — столбец. Найдём максиминную i_+ и минимаксную j^+ стратегии игроков. Из матрицы игры видно, что функции $F_+(i)=\min\limits_{1\le j\le 3} a_{ij}$ и $F^+(j)=\max\limits_{1\le i\le 3} a_{ij}$ принимают следующие значения: $F_+(1) = -1$, $F_+(2) = -2$, $F_+(3) = 0$; $F^+(1) = 2$, $F^+(2) = 0$, $F^+(3) = 3$. Следовательно, $\nu_+ = \max\limits_{1\le i\le 3} F_+(i) = 0$ и $i_+ = 3$. Далее, $\nu^+ = = \min\limits_{1\le j\le 3} F_+(j) = 0$ и $j^+ = 2$. Таким образом, равенство (7.8) выполнено и седловая точка имеет вид (3,2).

Пример 5 [5. С. 78–79]. Первая фирма производит сезонный товар, который имеет спрос в течении n дней. Этот товар поступает на рынок в i-й день, $i=\overline{1,n}$. Для конкурентной борьбы вторая фирма, не заботясь о собственных доходах и имея цель только разорить первую фирму, производит этот же товар и поставляет его на рынок в j-й день, $j=\overline{1,n}$.

Считаем, что качество конкурирующих товаров зависит от времени поступления их на рынок — чем позже выставляется товар на рынок, тем выше его качество. Реализуется товар более высокого качества. Тогда, если первая фирма выставит свой товар в момент времени i, а вторая фирма — в момент времени $j > i$, то первая фирма, не имея на рынке конкурента в течении $j - i$ дней, получит за это время доход, равный $c(j - i)$. Здесь $c > 0$ — доход от продажи товара в единицу времени. В момент времени j на рынке появляется более качественный товар второй фирмы. Первая фирма теряет рынок и дальнейшего дохода не получает. Если $i > j$, то первая фирма, выбросив на рынок товар более высокого качества, будет получать доход в течение $n - i + 1$ дней. Следовательно, доход первой фирмы составит величину, которая равна $c(n - i + 1)$. Если же $i = j$, то на рынок поступают товары обеих фирм одного качества. В этом случае доход первой фирмы будет равен $0{,}5c(n - i + 1)$. Таким образом, доход первой фирмы имеет вид

$$a_{ij}\begin{cases} c(j-i) \text{ при } i<j, \\ \dfrac{c}{2}(n-i+1) \text{ при } i=j, \\ c(n-i+1) \text{ при } i>j. \end{cases}$$

Первая фирма, выбирая i-й день выброса товара на рынок, стремится максимизировать свой доход. Вторая фирма, выбирая j-й день выброса своего товара на рынок, стремится минимизировать доход первой фирмы.

Рассмотрим случай $n = 4$. Положим $c = 1$ и запишем матрицу игры

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1{,}5 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0{,}5 \end{pmatrix}.$$

Первый игрок выбирает строку, а второй — столбец. Найдём максиминную i_+ и минимаксную j^+ стратегии игроков. Из матрицы игры видно, что функции $F_+(i)=\min\limits_{1\le j\le 4} a_{ij}$ и $F^+(j)=\max\limits_{1\le i\le 4} a_{ij}$ принимают следующие значения: $F_+(1) = F_+(2) = F_+(3) = 1$, $F_+(4) = 0{,}5$; $F^+(1) = 3$, $F^+(2) = 2$, $F^+(3) = 2$, $F^+(4) = 3$. Следовательно, $\nu_+ = \max\limits_{1\le i\le 4} F_+(i) = 1$ и $i_+ = \overline{1,3}$. Далее, $\nu^+ = \min\limits_{1\le j\le 4} F_+(j) = 2$ и j^+=2,3.

Смешанные стратегии. Покажем, что при применении игроками смешанных стратегий всегда существует седловая точка. Вначале опишем смешанные стратегии.

Первый игрок выбирает i-ю строку с вероятностью λ_i. Второй игрок выбирает j-й столбец с вероятностью μ_j. Тогда

$$\lambda_i \le 0,\ i=\overline{1,m},\ \sum_{i=1}^{m}\lambda_i = 1;\ \mu_j \ge 0, j=\overline{1,n},\ \sum_{j=1}^{n}\mu_j = 1.$$

Обозначим

$$\Lambda_m = \left\{ \overline{\lambda} = (\lambda_1, \ldots, \lambda_m) : \lambda_i \le 0,\ i = \overline{1,m},\ \sum_{i=1}^{m} \lambda_i = 1 \right\},$$
$$M_n = \left\{ \overline{\mu} = (\mu_1, \ldots, \mu_n) : \mu_j \ge 0, j = \overline{1,n},\ \sum_{j=1}^{n} \mu_j = 1 \right\}. \tag{7.11}$$

Игроки делают выбор независимо друг от друга. Событие, заключающееся в том, что в результате выбора получится i-я строка и j-й столбец, есть произведение двух событий — первый игрок выбирает i-ю строку, а второй игрок выбирает j-й столбец. Следовательно, вероятность появления i-й строки и j-го столбца является произведением вероятности появления i-й строки на вероятность появления j-го столбца, то есть равна $\lambda_i\mu_j$. Поскольку число a_{ij} характеризует выигрыш первого игрока и проигрыш второго, то средний выигрыш первого игрока равен

$$Q(\overline{\lambda}, \overline{\mu}) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \lambda_i \mu_j. \tag{7.12}$$

Теорема 5. Выполнено равенство

$$\max_{\overline{\lambda} \in \Lambda_m} \min_{\overline{\mu} \in M_n} Q(\overline{\lambda}, \overline{\mu}) = \min_{\overline{\mu} \in M_n} \max_{\overline{\lambda} \in \Lambda_m} Q(\overline{\lambda}, \overline{\mu}) = \nu. \tag{7.13}$$

Доказательство. Функция (7.12) при любом $\overline{\mu} \in M_n$ линейно зависит от $\overline{\lambda}$ и при любом $\overline{\lambda} \in \Lambda_m$ линейно зависит от $\overline{\mu}$. Множества Λ_m и M_n являются выпуклыми, замкнутыми и ограниченными. Следовательно, выполнены все условия теоремы 4. Поэтому равенство (7.13) выполнено.

Число ν, определяемое равенством (7.13), называется *ценой матричной игры*. Стратегии $\overline{\lambda}^0$ и $\overline{\mu}^0$, удовлетворяющие неравенствам

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \lambda_i \mu_j^0 \le \nu \le \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \lambda_i^0 \mu_j. \tag{7.14}$$

называются *седловой точкой матрицы A*.

Перейдём к вопросу о нахождении седловых стратегий.

Теорема 6. Точка $(\overline{\lambda}^0, \overline{\mu}^0)$ является седловой точкой матрицы A, а число ν — ценой игры этой матрицы тогда и только тогда, когда

$$\sum_{i=1}^{m} a_{i1} \lambda_i^0 \ge \nu, \ldots, \sum_{i=1}^{m} a_{in} \lambda_i^0 \ge \nu,\ \ \sum_{i=1}^{m} \lambda_i^0 = 1,\ \ \lambda_i^0 \ge 0,\ \ i = \overline{1,m}; \tag{7.15}$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{1j} \mu_j^0 \le \nu, \ldots, \sum_{j=1}^{n} a_{mj} \mu_j^0 \le \nu,\ \ \sum_{j=1}^{n} \mu_j^0 = 1,\ \ \mu_j^0 \ge 0,\ \ j = \overline{1,n}. \tag{7.16}$$

Доказательство. Возьмём произвольную смешанную стратегию $\overline{\mu} = (\mu_1,\ldots,\mu_n)$. Умножим первое неравенство в (7.15) на число μ_1, второе — на μ_2 и т. д. Сложим получившиеся неравенства. Будем иметь правое неравенство в (7.14). Аналогично из неравенств (7.16) получается левое неравенство в (7.14).

Полагая в правом неравенстве (7.14) $\mu_1 = 1$, а все остальные $\mu_j = 0$, получим первое неравенство в (7.15). Аналогично получаются все остальные неравенства в (7.15) и в (7.16)

Пример 6 (двухпальцевая игра). Каждый из игроков выбрасывает на каждой из двух рук один или два пальца. На левой руке он указывает свой желаемый выигрыш, а на правой — предполагаемое число пальцев, которое выбросит противник на левой руке. Если оба игрока угадают или оба не угадают, то выигрыш каждого из игроков равен нулю. Если угадает один, то его выигрыш равен числу пальцев, показанных им на левой руке. Это число равняется проигрышу не угадавшего игрока. Запишем результат выигрыша в виде табл. 6.1.

Отметим, что пара чисел (i,j) означает, что игрок на левой руке указал i пальцев, а на правой — j пальцев.

Таблица 6.1

Матрица выигрышей

Игрок 1	Игрок 2			
	(1,1)	(1,2)	(2,1)	(2,2)
(1,1)	0	1	–2	0
(1,2)	–1	0	0	1
(2,1)	2	0	0	–2
(2,2)	0	–1	2	0

Таким образом, матрица выигрыша первого игрока равна

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Для нахождения седловой точки запишем неравенства (7.15) с $\nu = 0$:

$$-\lambda_2 + 2\lambda_3 \geq 0, \quad \lambda_1 - \lambda_4 \geq 0, \quad -2\lambda_1 + 2\lambda_4 \geq 0,$$

$$\lambda_2 - 2\lambda_3 \geq 0, \quad \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 = 1.$$

Отсюда получим, что $\lambda_2 = 2\lambda_3$, $\lambda_1 = \lambda_4$, $2\lambda_1 + 3\lambda_3 = 1$.

Следовательно,

$$\lambda_1^0 = \frac{1-3t}{2}, \;\; \lambda_2^0 = 2t, \;\; \lambda_3^0 = t, \quad \lambda_4^0 = \frac{1-3t}{2}, \;\; 0 \leq t \leq \frac{1}{3}.$$

Аналогично, записывая неравенства (7.16) с $\nu = 0$, получим

$$\mu_2 - 2\mu_3 \le 0, \quad -\mu_1 + \mu_4 \le 0, \quad 2\mu_1 - 2\mu_4 \le 0,$$
$$\mu_2 - 2\mu_3 \le 0, \quad \mu_1 + \mu_2 + \mu_3 + \mu_4 = 1.$$

Отсюда находим, что

$$\mu_1^0 = \frac{1-3\tau}{2}, \ \mu_2^0 = 2\tau, \ \mu_3^0 = \tau, \quad \lambda_4^0 = \frac{1-3\tau}{2}, \ 0 \le \tau \le \frac{1}{3}.$$

Теорема 7. Множество седловых точек матрицы не изменится, если ко всем её элементам прибавить одно и то же число. Цена игры изменится на это число.

Доказательство. Возьмём седловую точку $(\overline{\lambda}_0, \overline{\mu}_0)$ матрицы $A = \{a_{ij}\}$ и покажем, что она является седловой точкой матрицы $A_* = \{a_{ij} + a\}$. Для любых стратегий $\overline{\lambda} \in \Lambda_m$ и $\overline{\mu} \in M_n$ выполнено равенство

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}(a_{ij} + a)\lambda_i\mu_j = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\lambda_i\mu_j + a.$$

Отсюда и следует утверждение теоремы.

Определение 3. Скажем, что j-й столбец (i-я строка) является несущественным (несущественной) для второго (для первого) игрока, если существует k-й столбец (k-я строка) такой (такая), что

$$a_{1j} \ge a_{1k}, a_{2j} \ge a_{2k}, \ldots, a_{mj} \ge a_{mk}, \quad (a_{i1} \le a_{k1}, a_{i2} \le a_{k2}, \ldots, a_{in} \le a_{kn}).$$

Теорема 8. Если у матрицы имеется несущественный столбец (несущественная строка), то его (её) можно отбросить, причём у вновь полученной матрицы цена игры совпадает с ценой игры у исходной матрицы.

Доказательство. Рассмотрим случай несущественного j-го столбца. Имеем

$$\max_{\overline{\lambda}\in\Lambda_m}\min_{\overline{\mu}\in M_m}\left[\left(\sum_{i=1}^{m}\lambda_i a_{i1}\right)\mu_1 + \ldots + \left(\sum_{i=1}^{m}\lambda_i a_{ij}\right)\mu_j + \ldots + \left(\sum_{i=1}^{m}\lambda_i a_{ik}\right)\mu_k + \ldots + \left(\sum_{i=1}^{m}\lambda_i a_{in}\right)\mu_n\right].$$

Поскольку $a_{ij} \ge a_{ik}$ для всех $i = \overline{1, m}$, то $\sum_{i=1}^{m}\lambda_i a_{ij} \ge \sum_{i=1}^{m}\lambda_i a_{ik}$ для любых $\overline{\lambda} \in \Lambda_m$. Следовательно, у оптимальной стратегии второго игрока можно брать $\mu_j^0 = 0$.

Пример 7. Рассмотрим задачу о конкуренции двух фирм из примера 5. В матрице

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1,5 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0,5 \end{pmatrix}.$$

четвёртая строка является несущественной (она доминируется третьей строкой). Несущественным является первый столбец (он доминирует второй столбец). Выбросим эти строку и столбец, положив $\lambda_4^0=0$, $\mu_1^0=0$. Имеем новую матрицу

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1,5 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

В этой матрице третий столбец является несущественным. Выбросим его, положив $\mu_4^0=0$. Получим матрицу

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1,5 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

У этой матрице вторая строка является несущественной (она доминируется третьей). Выбросим её, положив $\lambda_2^0=0$. Получим матрицу $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

Таким образом, оптимальные стратегии в исходной игре имеют вид $\overline{\lambda}^0=(\lambda_1^0,0,\lambda_2^0,0)$, $\overline{\mu}^0=(0,\mu_1^0,\mu_2^0,0)$. Числа $(\lambda_1^0,\lambda_2^0)$ и (μ_1^0,μ_2^0) являются седловой точкой полученной матрицы $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$. Возьмём числа λ_1^0 = λ_2^0 = = 0,5, μ_1^0 = μ_2^0 = 0,5 и ν = 1,5. Покажем, что выполнены условия (7.15) и (7.16). В самом деле, 0,5 + 2·0,5 = 1,5; 2·0,5 + 0,5 = 1,5; 0,5 + 2·0,5 = = 1,5; 2·0,5 + 0,5 = 1,5. Таким образом, седловая точка в исходной игре имеет вид

$$\overline{\lambda}^0=(0,5;0;0,5;0),\quad \overline{\mu}^0=(0;0,5;0,5;0).$$

Сведение задачи об отыскании седловой точки к решению задачи линейного программирования. Прибавляя, если нужно, ко всем элементам матрицы игры одно и то же положительное число, считаем, что все $a_{ij}>0$. Рассмотрим задачи линейного программирования

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + \ldots + x_n \to \max, \\ a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \le 1, \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \le 1, \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, \ldots, x_n \ge 0; \end{cases} \tag{7.17}$$

$$\begin{cases} y_1 + y_2 + \ldots + y_m \to \min, \\ a_{11}y_1 + a_{21}y_2 + \ldots + a_{m1}y_m \ge 1, \\ a_{1n}y_1 + a_{2n}y_2 + \ldots + a_{mn}y_m \ge 1, \\ y_1 \ge 0, y_2 \ge 0, \ldots, y_m \ge 0. \end{cases} \tag{7.18}$$

Из того, что все коэффициенты $a_{ij} > 0$, следует, что многогранник, задаваемый системой линейных неравенств (7.17), является ограниченным. В самом деле, выполнены неравенства $0 \le x_j \le (a_{1j})^{-1}$, $j = \overline{1,n}$. Следовательно, задача линейного программирования (7.17) имеет оптимальное решение x_j^0, $j = \overline{1,n}$, причём $\sum_{j=1}^{n} x_j^0 > 0$. Задача линейного программирования (7.18) является двойственной к (7.17). По теореме о двойственности [1. С. 95–97] в задаче (7.18) существует оптимальное решение y_i^0, $i = \overline{1,m}$ и значения целевых функций на оптимальных решениях совпадают, то есть

$$\sum_{i=1}^{m} y_i^0 = \sum_{j=1}^{n} x_j^0.$$

Теорема 9. Пусть y_i^0, $i = \overline{1,m}$ и x_j^0, $j = \overline{1,n}$ — это оптимальные решения задач (7.17) и (7.18). Тогда седловые стратегии и цена игры задаются формулами

$$\frac{1}{\nu} = x_1^{\ 0} + x_2^{\ 0} + \ldots + x_n^{\ 0} = y_1^{\ 0} + y_2^{\ 0} + \ldots + y_m^{\ 0};$$

$$\lambda_i^0 = \nu y_i^0; \;\; i = \overline{1,m}; \quad \mu_j^0 = \nu x_j^0; \; j = \overline{1,n}. \tag{7.19}$$

Доказательство. Очевидно, что стратегии (7.19) удовлетворяют требуемым условиям $\sum_{i=1}^{m} \lambda_i^0 = 1$, $\lambda_i^0 \ge 0$; $i = \overline{1,m}$ и $\sum_{j=1}^{n} \mu_j^0 = 1$, $\mu_j^0 \ge 0$; $j = \overline{1,n}$. Из неравенств (7.17) и (7.18), записанных для оптимального решения, имеем

$$1 \ge \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j^0 = \frac{1}{\nu} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \mu_j^0, \quad 1 \le \sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i^0 = \frac{1}{\nu} \sum_{i=1}^{m} a_{ij} \lambda_i^0, \quad \sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i^0 = \frac{1}{\nu} \sum_{i=1}^{m} a_{ij} \lambda_i^0.$$

Таким образом, найденная точка $(\bar{\lambda}^0, \bar{\mu}^0)$ и число ν удовлетворяют условиям теоремы 6.

Решение матричных игр размером 3×2. Пусть матрица игры имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix}.$$

Вначале решаем задачу линейного программирования

$$w = \max(x_1 + x_2), \quad a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \le 1, \quad a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \le 1,$$
$$a_{31}x_1 + a_{32}x_2 \le 1, \quad x_1 \ge 0, x_2 \ge 0.$$

Эту задачу можно решить, например, *геометрическим способом*.

В начале отметим, что линейное неравенство $a_1x_1 + a_2x_2 \le b$ определяет на плоскости $0x_1x_2$ одну из полуплоскостей, на которые разбивает всю плоскость прямая $a_1x_1 + a_2x_2 = b$

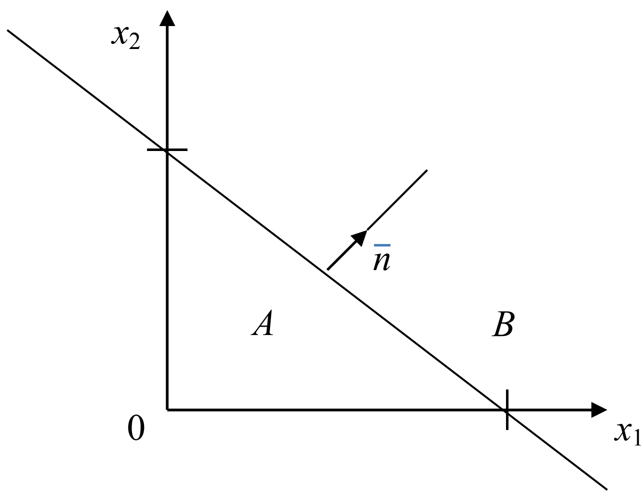

Рис. 7.1

Какую именно из полуплоскостей определяет это неравенство можно определить, подставив в него точку $x_1 = 0$, $x_2 = 0$. Вектор $\bar{n}$ с координатами (a_1, a_2) перпендикулярен прямой $a_1x_1 + a_2x_2 = b$ и направлен в сторону возрастания выражения $a_1x_1 + a_2x_2$. В самом деле, из точки A с координатами (x_1, x_2), лежащей на этой прямой, перейдём в точку B с координатами $(x_1 + ta_1,\ x_2 + ta_2)$, $t > 0$. Получим $a_1(x_1 + ta_1) + a_2(x_2 + ta_2) = a_1x_1 + a_2x_2 + t(a_1^2 + a_2^2) > b$.

Каждое из неравенств $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 \le 1$ определяет на плоскости полуплоскость. Пересечение этих полуплоскостей вместе с неравенствами $x_i \ge 0$ задают выпуклый многоугольник, который называется *многоугольником решений системы неравенств.* После того, как построен многоугольник решений, нужно найти на нём точку, где функция $x_1 + x_2$ достигает максимального значения. Для этого рисуют прямую $x_1 + x_2 = 0$, а затем перемещают её параллельно в сторону вектора $\overline{n} = (1;1)$. Точка многоугольника решений, где в последний раз перемещаемая прямая пересекает этот многоугольник, и будет решением рассматриваемой задачи линейного программирования.

Затем геометрическим способом решаем систему линейных неравенств и равенств

$$y_1 + y_2 + y_3 = w,\ a_{11}y_1 + a_{21}y_2 + a_{31}y_3 \ge 1,$$
$$a_{12}y_1 + a_{22}y_2 + a_{32}y_3 \ge 1,\ y_1 \ge 0,\ y_2 \ge 0,\ y_3 \ge 0. \tag{7.20}$$

Для этого из первого уравнения находим $y_3 = w - y_1 - y_2$. Подставим это выражение в оставшиеся неравенства (7.20). Получим систему линейных неравенств с двумя неизвестными

$$a_{11}y_1 + a_{21}y_2 + a_{31}(w - y_1 - y_2) \ge 1,\quad a_{12}y_1 + a_{22}y_2 + a_{32}(w - y_1 - y_2) \ge 1,$$
$$y_1 \ge 0,\ y_2 \ge 0,\ w \ge y_1 + y_2,$$

которую нетрудно решить геометрическим способом.

Решение матричных игр размером 2×3. Пусть матрица игры имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}.$$

Вначале решаем задачу линейного программирования

$$w = \min(y_1 + y_2),\ a_{11}y_1 + a_{21}y_2 \ge 1,\quad a_{12}y_1 + a_{22}y_2 \ge 1,$$
$$a_{13}y_1 + a_{23}y_2 \ge 1,\quad y_1 \ge 0,\ y_2 \ge 0.$$

Затем геометрическим способом решаем систему

$$x_1 + x_2 + x_3 = w,\ a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 \le 1,$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 \le 1,\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0,\ x_3 \ge 0.$$

Решение матричных игр размером 2×*n*. Пусть матрица игры имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2n} \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$\min_{\overline{\mu} \in M_n} \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{2} a_{ij}\lambda_i\mu_j = \min_{1 \le j \le n}(a_{1j}\lambda_1 + a_{2j}\lambda_2) = \min_{1 \le j \le n}(a_{1j}\lambda + a_{2j}(1-\lambda)).$$

Здесь обозначено $\lambda_1 = \lambda$, $\lambda_2 = 1 - \lambda$, $0 \le \lambda \le 1$. На плоскости (λ,ν) нарисуем прямые

$$\nu = a_{1j}\lambda + a_{2j}(1 - \lambda),\ j = \overline{1,n}. \tag{7.21}$$

Затем для каждого $\lambda \in [0,1]$ путём визуального сравнения выбирается минимальное значение ν. Получается ломаная, которая является графиком функции $\nu = \min\limits_{1 \le j \le n} (a_{1j}\lambda + a_{2j}(1 - \lambda))$. Она является нижней огибающей семейства прямых (7.21). Верхняя точка этой кривой даёт значение цены игры и оптимальную стратегию первого игрока.

Пример 8 [7. С. 239]. Пусть матрица игры имеет следующий вид:

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 4 & 3 & 1 & -1 & 0 \\ -2 & -1 & 1 & 0 & 5 & 4 \end{pmatrix}.$$

Запишем уравнения прямых (7.21)

$\nu = 6\lambda - 2(1 - \lambda) = 8\lambda - 2$, (1); $\nu = \lambda + 0(1 - \lambda) = \lambda$, (4);

$\nu = 4\lambda - (1 - \lambda) = 5\lambda - 1$, (2); $\nu = -\lambda + 5(1 - \lambda) = -6\lambda + 5$, (5);

$\nu = 3\lambda + (1 - \lambda) = 2\lambda + 1$, (3); $\nu = 0\lambda + 4(1 - \lambda) = -4\lambda + 4$, (6).

Эти прямые изображены на рис. 7.2.

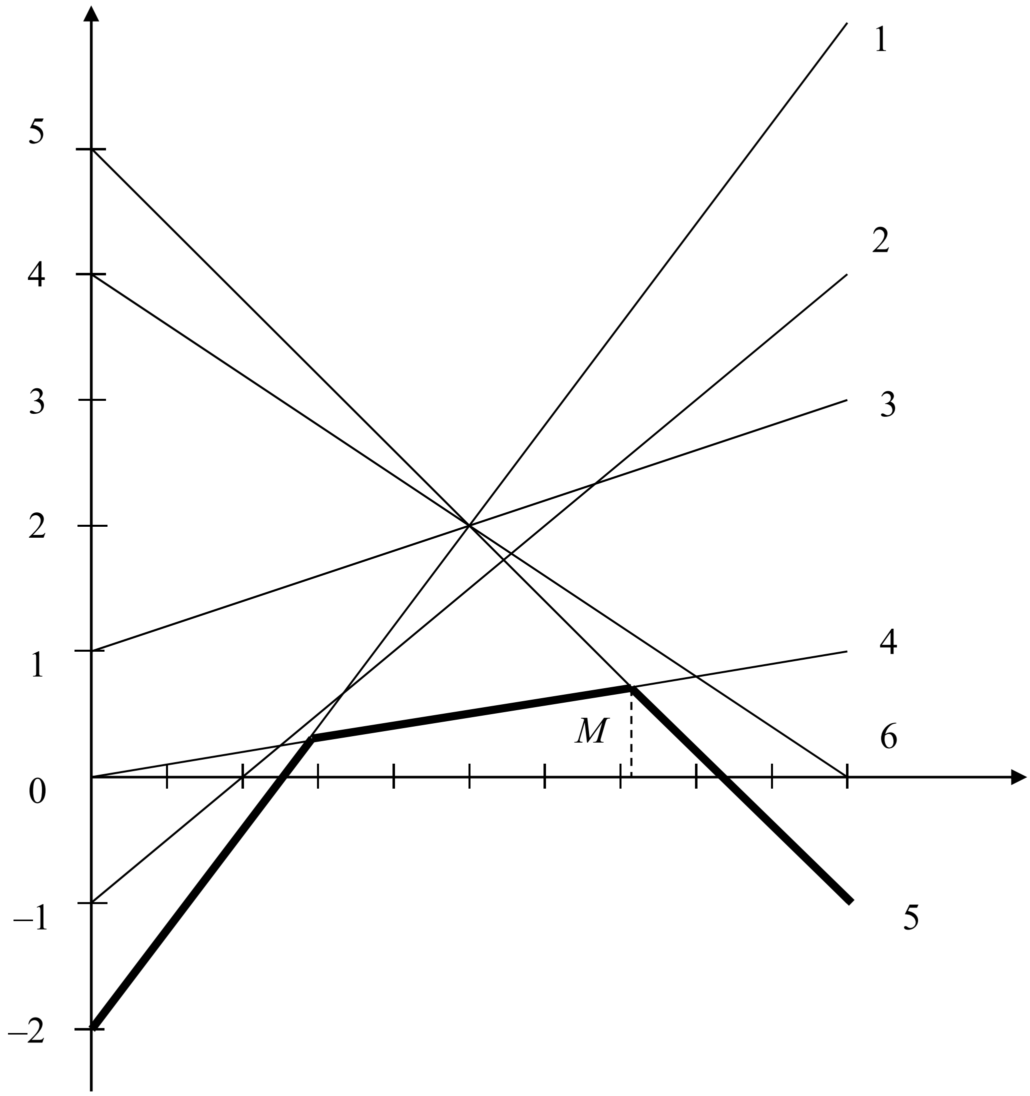

Рис. 7.2

Из этого рисунка видно, что верхняя точка M нижней огибающей этих прямых находится из условия пересечения прямых (4) и (5). Из равенства $\lambda = -6\lambda + 5$ находим, что $\lambda^0 = \frac{5}{7}$, $\nu = \lambda^0 = \frac{5}{7}$. Таким образом, оптимальная стратегия первого игрока равна $\lambda_1^0 = \lambda^0 = \frac{5}{7}$, $\lambda_2^0 = 1 - \lambda^0 = \frac{2}{7}$. Значение игры равно $\frac{5}{7}$.

Для нахождения оптимальной стратегии второго игрока воспользуемся теоремой 6. Найдём решение неравенств (7.16), которые в рассматриваемом примере принимают вид

$$\sum_{j=1}^{6} a_{1j}\mu_j^0 \le \frac{5}{7}, \quad \sum_{j=1}^{6} a_{2j}\mu_j^0 \le \frac{5}{7}, \quad \sum_{j=1}^{6} \mu_j^0 = 1, \quad \mu_j^0 \ge 0, \quad j = \overline{1,6}. \tag{7.22}$$

Обратим внимание, что

$$\max_{1\le j\le 6}(a_{1j}\lambda^0 + a_{2j}(1-\lambda^0)) = \min_{j=4,5}(a_{1j}\lambda^0 + a_{2j}(1-\lambda^0)).$$

Поэтому полагаем, что $\mu_1^0 = \mu_2^0 = \mu_3^0 = \mu_6^0 = 0$, $\mu_4^0 = \mu$ и $\mu_5^0 = 1 - \mu$. Тогда неравенства (7.22) примут вид

$$a_{14}\mu + a_{15}(1-\mu) \le \frac{5}{7}, \quad a_{24}\mu + a_{25}(1-\mu) \le \frac{5}{7}, \quad 0 \le \mu \le 1.$$

Подставляя сюда численные значения коэффициентов a_{ij}, будем иметь

$$\mu - (1-\mu) \le \frac{5}{7}, \quad 5(1-\mu) \le \frac{5}{7}, \quad 0 \le \mu \le 1 \Rightarrow \mu = \frac{6}{7}.$$

Оптимальная стратегия второго игрока имеет вид $\left(0;0;0;\frac{6}{7};\frac{1}{7};0\right)$.

Решение матричных игр размером $m\times 2$. Пусть матрица игры имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} \end{pmatrix}.$$

Положим $\mu_1 = \mu$ и $\mu_2 = 1 - \mu$. Тогда $0 \le \mu \le 1$ и

$$\min_{\overline{\mu}\in M_2} \max_{\lambda\in\Lambda_m} \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{2} a_{ij}\lambda_i\mu_j = \min_{0\le\mu\le 1}\max_{1\le i\le m}(a_{i1}\mu + a_{i2}(1-\mu)).$$

На плоскости (λ,ν) нарисуем прямые

$$\nu = a_{i1}\mu + a_{i2}(1-\mu), \quad i = \overline{1,m}. \tag{7.23}$$

Затем для каждого $\mu \in [0,1]$ путём визуального сравнения выбирается максимальное значение ν. Получается ломаная, которая является графиком функции $\nu = \max\limits_{1 \le i \le m} = (a_{i1}\mu + a_{i2}(1-\mu))$. Она является верхней огибающей семейства прямых (7.23). Находим на этой ломаной нижнюю точку, которая даёт оптимальную стратегию второго игрока $\mu_1^0 = \mu^0$ и $\mu_2^0 = 1 - \mu^0$ и значение цены игры.

Пример 9 [7. С. 242]. Пусть матрица игры имеет следующий вид:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Запишем уравнения прямых (7.23)

$$\nu = 3\mu - (1 - \mu) = 4\mu - 1 \qquad (1);$$
$$\nu = -\mu + 3(1 - \mu) = -4\mu + 3 \qquad (2);$$
$$\nu = \mu + 0(1 - \mu) = \mu \qquad (3).$$

Из рис. 7.3 видно, что нижняя точка M верхней огибающей этих прямых находится из условия пересечения прямых (1) и (2).

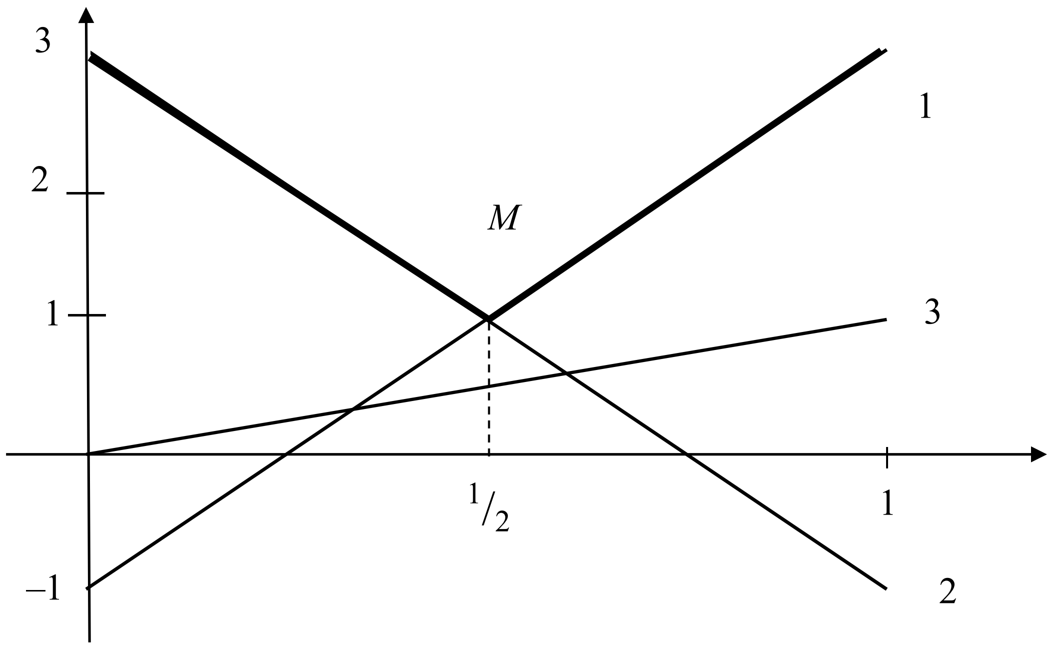

Рис. 7.3

Из равенства $4\mu - 1 = -4\mu + 3$ находим $\mu^0 = 0{,}5$. Следовательно, оптимальная стратегия второго игрока имеет вид $\mu_1^0 = \mu_2^0 = 0{,}5$. Цена игры $\nu = 4\mu^0 - 1 = 1$. Для нахождения оптимальной стратегии первого игрока воспользуемся теоремой 8. Найдём решение неравенств (7.15), которые в рассматриваемом примере принимают вид

$$\sum_{i=1}^{3} a_{i1}\lambda_i^0 \ge 1,\ \ \sum_{i=1}^{3} a_{i2}\lambda_i^0 \ge 1,\ \ \sum_{i=1}^{3} \lambda_i^0 = 1,\ \ \lambda_i^0 \ge 0,\ \ i=\overline{1,3}. \qquad (7.24)$$

Отметим, что

$$\max_{1\le i\le 3}(a_{i1}\mu^0 + a_{i2}(1-\mu^0)) = \max_{1\le i\le 2}(a_{i1}\mu^0 + a_{i2}(1-\mu^0)).$$

Поэтому полагаем, что $\lambda_3^0 = 0$, $\lambda_1^0 = \lambda$ и $\lambda_2^0 = 1 - \lambda$. Тогда неравенства (7.24) примут вид $a_{11}\lambda + a_{21}(1 - \lambda) \ge 1$, $a_{12}\lambda + a_{22}(1 - \lambda) \ge 1$, $0 \le \lambda \le 1$. Подставляя сюда численные значения коэффициентов a_{ij}, будем иметь $3\lambda - (1 - \lambda) \ge 1$, $-\lambda + 3(1 - \lambda) \ge 1 \Rightarrow \lambda = 1/2$.

Оптимальная стратегия первого игрока имеет вид $\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2};0\right)$.

Пример 10 [5. С. 61–68]. Рассмотрим задачу о поставке товаров, когда на товарной базе имеются два вида товаров. Если первый товар пользуется спросом, то магазин от реализации его одной единицы получит прибыль, равную $p > 0$ денежных единиц. Если же этот товар не пользуется спросом, то затраты на хранение его одной единицы в магазине составляют $b > 0$ денежных единиц. Аналогично для второго товара — прибыль от продажи одной его единицы равна q, а затраты на хранение его одной единицы равны $a > 0$ денежных единиц. Магазин может завести N единиц совокупного количества товара. Считаем, что до завоза в магазин товара спрос неизвестен.

Пусть магазин завозит $\lambda_1 N$ единиц первого товара и $\lambda_2 N$ единиц второго товара, $\lambda_1 \ge 0$, $\lambda_2 \ge 0$, $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$. Тогда прибыль магазина при спросе на первый товар равна $Q_1 = (p\lambda_1 - a\lambda_2)N$ денежных единиц. Если же имеется спрос на второй вид товара, то прибыль магазина составит величину, равную $Q_2 = (q\lambda_2 - b\lambda_1)N$ денежных единиц. Наихудшее количество прибыли магазина равно

$$Q = \min(Q_1;Q_2) = \min_{\bar{\mu}\in M_2}(\mu_1 Q_1 + \mu_2 Q_2) =$$
$$= N\min_{\bar{\mu}\in M_2}((\mu_1(p\lambda_1 - a\lambda_2) + \mu_2(q\lambda_1 - b\lambda_2)) =$$
$$= N\min_{\bar{\mu}\in M_2}(p\lambda_1\mu_1 - a\lambda_2\mu_1 + q\lambda_1\mu_2 - b\lambda_2\mu_2).$$

Считаем, что магазин (первый игрок) максимизирует наихудшее количество прибыли Q, а спрос (второй игрок) — минимизирует. Получим матричную игру с матрицей $\begin{pmatrix} p & -b \\ -a & q \end{pmatrix}$. Считаем, что расходы на хранение первого товара больше расходов на хранение второго, то есть $b > a$.

Прибавим ко всем элементам матрицы игры число b. Получим новую матрицу $\begin{pmatrix} p+b & 0 \\ b-a & q+b \end{pmatrix}$. Запишем задачу (7.18)

$$y_1 + y_2 \to \min,\ (p + b)y_1 + (b - a)y_2 \geq 1,$$
$$(q + b)y_2 \geq 1,\ y_1 \geq 0,\ y_2 \geq 0.$$

Угловыми точками многогранника, определяемого неравенствами в этой задаче, являются точки

$$M_1\left(0; \frac{1}{b-a}\right),\ M_2\left(\frac{q+a}{(q+b)(p+b)}; \frac{1}{q+b}\right).$$

Вычислим значение целевой функции в каждой из этих точек. В точке M_1 она равна $\dfrac{1}{b-a}$, а в точке M_2 имеет вид $\dfrac{q+a}{(q+b)(p+b)} + \dfrac{1}{q+b} =$ $= \dfrac{q+a+p+b}{(q+b)(p+b)}$.

Далее,

$$\frac{q+a+p+b}{(q+b)(p+b)} < \frac{1}{b-a} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow qb + ab + pb + b^2 - qa - a^2 - pa - ba < qp + qb + bp + b^2 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow -qa - a^2 - pa < qb.$$

Таким образом, цена игры в новой матрице равна

$$\nu = \frac{(q+b)(p+b)}{p+a+q+b}.$$

Из формулы (7.19) получим, что

$$\lambda_1^0 = \nu \frac{q+a}{(q+b)(p+b)} = \frac{q+a}{p+a+q+b},\ \ \lambda_2^0 = \nu \frac{1}{q+b} = \frac{p+b}{p+a+q+b}.$$

Рентабельность завоза при неизвестном спросе определяется из условия, что цена игры в исходной матрице неотрицательна, то есть $\nu - b \geq 0$. Отсюда получим условие рентабельности $\dfrac{(q+b)(p+b)}{p+a+q+b} \geq$ $\geq b \Leftrightarrow pq \geq ab$.

Таким образом, завоз является рентабельным, если произведение коэффициентов прибыли не меньше произведения коэффициентов затрат на хранение.

8. Игры многих лиц в нормальной форме

Имеется n игроков. При каждом $i=\overline{1,n}$ задано множество X_i произвольной природы, называемое множеством стратегий i-го игрока. На прямом произведении $X = X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_n$ определены функции f_i: $X \to R$, $i=\overline{1,n}$. Функция f_i является функцией выигрыша i-го игрока. Каждый игрок независимо от других выбирает свою стратегию $x_i \in X_i$. В результате реализуется ситуация $\overline{x}=(x_1,...,x_n)\in X$, после чего каждый i-й игрок получает причитающуюся ему в этой ситуации величину

$$f_i(\overline{x}) = f(x_1,\ldots,x_{i-1},x_i,x_{i+1},x_{i+2},\ldots,x_n).$$

Каждый из игроков стремится получить как можно больший выигрыш. Описанная игра называется *бескоалиционной игрой* Γ и обозначается

$$\Gamma=\left\{i=\overline{1,n};\{X_i\}_{i=\overline{1,n}};\{f_i\}_{i=\overline{1,n}}\right\}. \qquad (8.1)$$

Можно рассмотреть игру (8.1) в качестве многокритериальной задачи

$$f_1(\overline{x})\to\max,...,f_n(\overline{x})\to\max,\ \ \overline{x}\in X \qquad (8.2)$$

и брать в качестве приемлемых для игроков ситуации, являющимися, например, оптимальными по Парето решениями многокритериальной задачи (8.2). Однако в этом случае игроки должны договариваться между собой.

У А. Аверченко есть рассказ «Золотые часы», в котором он описывает ситуацию, когда один из жителей местечка Мордохово собирался купить у другого золотые часы для своего сына. Сделка не состоялась, так как продавец побоялся положить часы на стол (вдруг покупатель схватит и убежит), а покупатель из тех же соображений не выпускал деньги из своих рук. Не доверяли люди друг другу.

Определение 1. Ситуация $\overline{x}^{(0)}=(x_1^{(0)},...,x_i^{(0)},...,x_n^{(0)})\in X$ называется *ситуацией равновесия* (или *оптимальной*) *по Нэшу*, если

$$\begin{gathered} f_i(x_1^{(0)},\ldots,x_{i-1}^{(0)}, y_i, x_{i+1}^{(0)},\ldots, x_n^{(0)}) \le \\ \le f_i(x_1^{(0)},\ldots,x_{i-1}^{(0)}, x_i^{(0)}, x_{i+1}^{(0)},\ldots, x_n^{(0)}) \end{gathered} \qquad (8.3)$$

для любых $y_i \in X_i$ и $i \in \overline{1,n}$.

Ситуация равновесия по Нэшу характеризуется тем, что ни одному из игроков невыгодно отклоняться от неё индивидуально.

Рассмотрим игру двух лиц, в которой $f_1(x_1,x_2) + f_2(x_1,x_2) = 0$. Тогда $f_1(x_1,x_2) = f(x_1,x_2)$ и $f_2(x_1,x_2) = -f(x_1,x_2)$. Покажем, что в этом случае точка равновесия по Нэшу становится седловой точкой в антагонистической игре двух лиц $\Gamma = \{X_1, X_2, f(x_1, x_2)\}$. В самом деле, из неравенств (8.3) следует, что $f(x_1, x_2^{(0)}) \le f(x_1^{(0)}, x_2^{(0)})$ и $-f(x_1^{(0)}, x_2) \le -f(x_1^{(0)}, x_2^{(0)})$. Отсюда получим условие седловой точки $f(x_1, x_2^{(0)}) \le f(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}) \le f(x_1^{(0)}, x_2)$.

Отметим, что игры, в которых $\sum_{i=1}^{n} f_i(x_1, x_2, ..., x_n) = 0$, называются *играми с нулевой суммой.*

Пример 1. Пусть $f_1(x_1, x_2) = x_1(x_1 - x_2)$, $f_2(x_1, x_2) = x_2(x_1 - x_2)$; $x_1 \in [-1,1]$, $x_2 \in [-1,1]$ (см. рис. 8.1). Покажем, что в этом случае не существует ситуации равновесия по Нэшу. В самом деле,

$$\max_{|y_1| \le 1}(y_1(y_1 - x_2^{(0)})) = \max(1 - x_2^{(0)}; 1 + x_2^{(0)}) = 1 + \left|x_2^{(0)}\right|,$$

$$\max_{|y_2| \le 1}(y_2(x_1^{(0)} - y_2)) = \frac{1}{4}(x_1^{(0)})^2.$$

Поэтому неравенства (8.3) принимают вид

$$1 + \left|x_2^{(0)}\right| \le x_1^{(0)}(x_1^{(0)} - x_2^{(0)}), \quad \frac{1}{4}(x_1^{(0)})^2 \le x_2^{(0)}(x_1^{(0)} - x_2^{(0)}). \qquad (8.4)$$

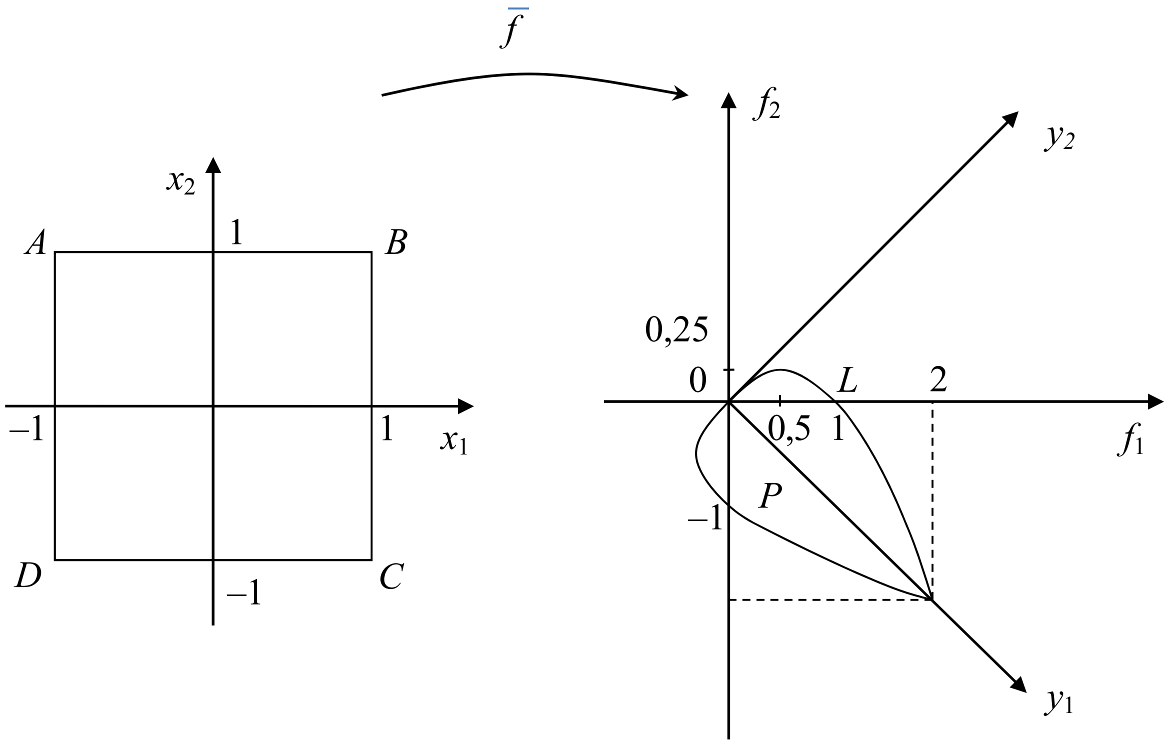

Рис. 8.1

Последнее неравенство в (8.4) можно записать в виде $(x_1^{(0)} - 2x_2^{(0)})^2 \le 0$. Отсюда получим, что $x_1^{(0)} = 2x_2^{(0)}$. Подставим это равенство в первое неравенство (8.4). Получим

$$1+\left|x_2^{(0)}\right| \le 2(x_2^{(0)})^2. \quad (8.5)$$

Из равенства $x_1^{(0)} = 2x_2^{(0)}$ следует, что $\left|x_2^{(0)}\right| \le \frac{1}{2}$. При $|x| \le \frac{1}{2}$ выполнено неравенство $2x^2 - |x| \le 0$. Стало быть, неравенство (8.5) не выполнено.

Отметим, что оптимальные по Парето точки в рассматриваемом примере существуют (см. рис. 8.1).

Для доказательства теоремы о существовании оптимальной по Нэшу точки потребуется вспомогательный материал. Считаем, что задано линейное вещественное конечномерное нормированное пространство E.

Пусть $Z \subset E$ — некоторое множество и каждой точке $z \in Z$ поставлено в соответствие непустое множество $F(z) \subset E$. В этом случае будем говорить, что задано *многозначное отображение* F: $Z \to 2^E$.

Многозначное отображение F: $Z \to 2^E$ называется *выпуклозначным,* если при любом $z \in Z$ множество $F(z)$ является выпуклым.

Пример 2. Пусть $E = R$, $Z = [a,b]$, $F(z) = [\alpha(z),\beta(z)]$. Здесь при любом $z \in [a,b]$ скалярные функции $\alpha(z)$ и $\beta(z)$ удовлетворяют неравенству $\alpha(z) \le \beta(z)$. В этом примере многозначное отображение F: $[a,b] \to 2^R$ является выпуклозначным (см. рис. 8.2 и рис. 8.3).

Определение 2. Многозначное отображение F: $Z \to 2^E$ называется *замкнутым*, если замкнутым является его график $\{(z,y)$: $z \in Z, y \in F(z)\}$, то есть множество Z является замкнутым, и если $z_k \in Z$, $y_k \in F(z_k)$, $z_k \to z$, $y_k \to y$, то $y \in F(z)$.

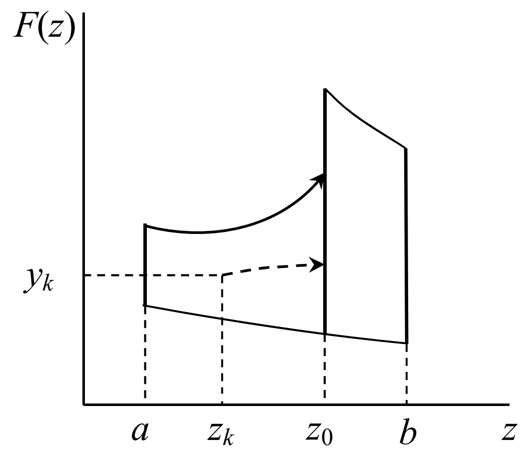

Рис. 8.2

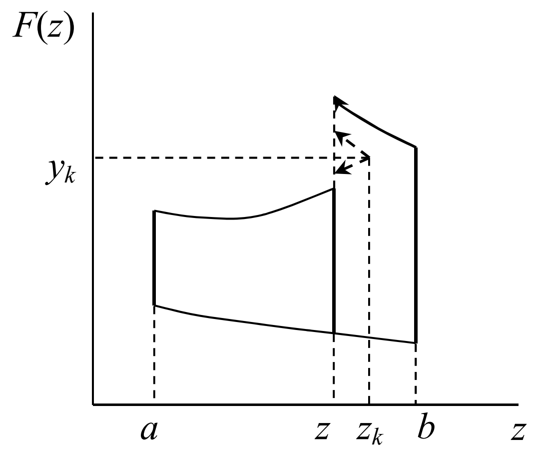

Рис. 8.3

Пример 3. Если функции $\alpha(z)$ и $\beta(z)$ в примере 2 являются непрерывными на отрезке $[a,b]$, то многозначное отображение $F(z) = [\alpha(z),\beta(z)]$ является замкнутым.

Приведём без доказательства теорему Какутани о неподвижной точке многозначного отображения [4. С. 254–255].

Теорема 1 (Какутани). Пусть $Z \subset E$ — выпуклый компакт, а выпуклозначное замкнутое многозначное отображение F: $Z \to 2^E$ удовлетворяет включению $F(z) \subset Z$ при любом $z \in Z$. Тогда существует точка $z_0 \in Z$ такая, что $z_0 \in F(z_0)$.

Определение 3. Пусть $Z \subset E$ — выпуклое множество. Функция f: $Z \to R$ называется *квазивогнутой*, если для любых точек $z_1,z_2 \in Z$ и для любого числа $0 < \lambda < 1$ выполнено неравенство

$$f(\lambda z_1 + (1 - \lambda)z_2) \geq \min(f(z_1);f(z_2)). \tag{8.6}$$

Утверждение 1. Вогнутая функция f: $Z \to R$ является квазивогнутой.

Доказательство. Имеем $f(\lambda z_1 + (1 - \lambda)z_2) \geq \lambda f(z_1) + (1 - \lambda)f(z_2) \geq \min(f(z_1);f(z_2))$.

Теорема 2. Пусть в игре (8.1) каждое из множеств X_i является выпуклым компактом линейного вещественного конечномерного нормированного пространства E_i, $i = \overline{1,n}$, а каждая из функций f_i: $X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_n \to R$ является непрерывной на множестве $X = X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_n$ и квазивогнута по переменной x_i при фиксированных переменных $x_1,\ldots,x_{i-1}$, $x_{i+1},\ldots,x_n$. Тогда в игре (8.1) существует точка равновесия по Нэшу.

Доказательство. Рассмотрим линейное пространство $E = E_1 \times E_2 \times \ldots \times E_n$. Его элементом является точка $\overline{x} = (x_1,...,x_{i-1},x_i,x_{i+1},...,x_n)$, норма которой равна $\|\overline{x}\|_E = \sum\limits_{i=1}^{n}\|x_i\|$. Множество $X = X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_n$ является выпуклым компактом в пространстве E.

Из непрерывности функции f_i и из того, что множество X_i является компактом, следует, что функция

$$f_i^{(\max)}(\overline{x}) = \max_{t \in X_i} f_i(x_1,...,x_{i-1},t,x_{i+1},...,x_n)$$

непрерывна, а множество

$$F_i(\overline{x}) = \{t \in X_i : f_i(x_1,\ldots,x_{i-1},t,x_{i+1},\ldots,x_n) = f_i^{(\max)}(\overline{x})\} \tag{8.7}$$

для каждой точки $\overline{x} \in X$ является компактом. Покажем, что оно является выпуклым. Возьмём две точки $y_i^{(1)}, y_i^{(2)} \in F_i(\overline{x})$. Из формулы (8.7) следует, что

$$f_i(x_1,\ldots,x_{i-1}, y_i^{(1)}, x_{i+1},\ldots,x_n) = f_i^{(\max)}(\overline{x})$$
$$\text{и } f_i(x_1,\ldots,x_{i-1}, y_i^{(2)}, x_{i+1},\ldots,x_n) = f_i^{(\max)}(\overline{x}).$$

Отсюда, используя квазивогнутость функции f_i по переменной x_i, получим, что

$$f_i(x_1,\ldots,x_{i-1}, \lambda y_i^{(1)} + (1-\lambda)y_i^{(2)}, x_{i+1},\ldots,x_n) \geq$$
$$\geq \min(f_i(x_1,\ldots,x_{i-1}, y_i^{(1)}, x_{i+1},\ldots,x_n);$$
$$f_i(x_1,\ldots,x_{i-1}, y_i^{(2)}, x_{i+1},\ldots,x_n)) = f_i^{(\max)}(\overline{x})$$

для любого числа $0 < \lambda < 1$. Стало быть,

$$f_i(x_1,\ldots,x_{i-1},\lambda y_i^{(1)} + (1-\lambda)y_i^{(2)}, x_{i+1},\ldots,x_n) = f_i^{(\max)}(\overline{x}).$$

Отсюда и из (8.7) получим включение $\lambda y_i^{(1)} + (1-\lambda)y_i^{(2)} \in F_i(\overline{x})$.

Покажем, что многозначное отображение $F_i(\overline{x})$ является замкнутым. Возьмём последовательность точек $\overline{x}^{(k)} \to \overline{x}$, $y_i^{(k)} \in F(\overline{x}^{(k)})$, $t^{(k)} \to t$ при $k \to \infty$. Это значит, что $f_i(x_1^{(k)},\ldots,x_{i-1}^{(k)},t^{(k)}, x_{i+1}^{(k)},\ldots,x_n^{(k)}) = f_i^{(\max)}(\overline{x}^{(k)})$. Отсюда, используя непрерывность функций $f_i(\overline{x})$ и $f_i^{(\max)}(\overline{x})$, получим равенство $f_i(x_1,\ldots,x_{i-1},t, x_{i+1},\ldots,x_n) = f_i^{(\max)}(\overline{x})$. Стало быть, $y_i \in F(\overline{x})$.

Рассмотрим многозначное отображение F: $X \to 2^E$, которое определяется формулой $F(\overline{x}) = F_1(\overline{x}) \times F_1(\overline{x}) \times \ldots \times F_n(\overline{x})$. Множество $X \subset E$ является выпуклым компактом, а выпуклозначное, замкнутое многозначное отображение F: $X \to 2^E$ удовлетворяет включению $F(\overline{x}) \subset X$. По теореме Какутани существует точка $\overline{x}^{(0)} \in X$ такая, что $\overline{x}^{(0)} \in F(\overline{x}^{(0)})$. Из этого включения следует, что $x_i^{(0)} \in F_i(\overline{x}^{(0)})$ для любого $i = \overline{1,n}$. Отсюда и из формулы (8.7) получим, что $f_i(x_1^{(0)},\ldots,x_{i-1}^{(0)},x_i^{(0)}, x_{i+1}^{(0)},\ldots,x_n^{(0)}) = f_i^{(\max)}(\overline{x}^{(0)})$. Стало быть,

$$f_i(x_1^{(0)},\ldots,x_{i-1}^{(0)},y_i, x_{i+1}^{(0)},\ldots,x_n^{(0)}) \leq f_i^{(\max)}(\overline{x}^{(0)}) =$$
$$= f_i(x_1^{(0)},\ldots,x_{i-1}^{(0)},x_i^{(0)}, x_{i+1}^{(0)},\ldots,x_n^{(0)})$$

для любого $y_i \in X_i$.

Рассмотрим игру $\Gamma = \{i = 1,2; \{X_i\}_{i=\overline{1,2}}; \{f_i\}_{i=\overline{1,2}}\}$. Считаем, что существует точка равновесия по Нэшу

$$f_1(x_1,x_2^0) \leq f_1(x_1^0,x_2^0);\ f_1(x_1^0,x_2) \leq f_1(x_1^0,x_2^0).$$

Отсюда следует, что

$$\nu_1 = \sup_{x_1 \in X_1} \inf_{x_2 \in X_2} f_1(x_1,x_2) \leq \sup_{x_2 \in X_2} \inf_{x_1 \in X_1} f_1(x_1,x_2) \leq \sup_{x_1 \in X_1} f_1(x_1,x_2^0) \leq f_1(x_1^0,x_2^0),$$

$$\nu_2 = \sup_{x_2 \in X_2} \inf_{x_1 \in X_1} f_2(x_1,x_2) \leq \inf_{x_1 \in X_1} \sup_{x_2 \in X_2} f_2(x_1,x_2) \leq \sup_{x_2 \in X_2} f_2(x_1^0,x_2) \leq f_2(x_1^0,x_2^0).$$

Таким образом, если существует точка равновесия по Нэшу, то игрокам выгоднее кооперироваться, чем смотреть друг на друга как на противников.

Смешанные стратегии. Рассмотрим случай, когда множество стратегий у каждого игрока состоит из конечного числа элементов, то есть $X_i = \{x_1^{(i)}, x_2^{(i)}, ..., x_{m_i}^{(i)}\}$, $i \in \overline{1,n}$.

Определение 4. Смешанной стратегией i-го игрока называется набор чисел $\pi_i = (\lambda_1^{(i)}, \lambda_2^{(i)}, ..., \lambda_{m_i}^{(i)})$, удовлетворяющих условиям $0 \le \lambda_j^{(i)} \le 1$, $\sum_{j=1}^{m_i} \lambda_j^{(i)} = 1$.

Под выигрышем i-го игрока понимается математическое ожидание выигрыша

$$(Mf_i)(p_1, p_2, \dots, p_n) = \sum_{s_1=1,\dots,s_n=1}^{m_1,\dots,m_n} f_i(x_{s_1}^{(1)}, ..., x_{s_n}^{(n)}) \lambda_{s_1}^{(1)} ... \lambda_{s_n}^{(n)}. \tag{8.8}$$

Теорема 3. Если в игре многих лиц у каждого игрока имеется конечное число стратегий, то в смешанных стратегиях игра имеет оптимальную по Нэшу ситуацию.

Доказательство. Множества

$$\Lambda_{m_i} = \left\{ \pi_i = (\lambda_1^{(i)}, \lambda_2^{(i)}, ..., \lambda_{m_i}^{(i)}) \in R^{m_i} : 0 \le \lambda_j^{(i)} \le 1, \ \sum_{j=1}^{m_i} \lambda_j^{(i)} = 1 \right\}$$

являются выпуклыми компактами. Функция $(Mf_i)(\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_n)$, определяемая формулой (8.8), непрерывно зависит от $\overline{\pi} = (\pi_1, \pi_2, ..., \pi_n)$. При фиксированных $\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_{i-1}, \pi_{i+1}, \dots, \pi_n$ функция (8.8) линейно зависит от π_i. Следовательно, она является квазивогнутой по π_i. По теореме 2 существует набор смешанных стратегий $\overline{\pi}^{(0)} = (\pi_1^{(0)}, \pi_2^{(0)}, ..., \pi_n^{(0)})$ такой, что

$$(Mf_i)(\pi_1^{(0)}, \pi_2^{(0)}, \dots, \pi_{i-1}^{(0)}, \pi_i, \pi_{i+1}^{(0)}, \dots, \pi_n^{(0)}) \le$$
$$\le (Mf_i)(\pi_1^{(0)}, \pi_2^{(0)}, \dots, \pi_{i-1}^{(0)}, \pi_i^{(0)}, \pi_{i+1}^{(0)}, \dots, \pi_n^{(0)})$$

для любых $\pi_i \in \Lambda_i$ и для любых $i \in \overline{1,n}$. Таким образом, в смешанных стратегиях игра имеет оптимальную по Нэшу ситуацию.

Рассмотрим игру двух игроков, у каждого из которых имеется конечное число стратегий.

Пусть $X_1 = \{x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, ..., x_m^{(1)}\}$, $X_2 = \{x_1^{(2)}, x_2^{(2)}, ..., x_n^{(2)}\}$. Обозначим $f_1(x_i^{(1)}, x_j^{(2)}) = a_{ij}$, $f_2(x_i^{(1)}, x_j^{(2)}) = a_{ij}$; $i = \overline{1,m}$, $j = \overline{1,n}$. Тогда игру можно записать с помощью одной матрицы

$$C=\begin{pmatrix} (a_{11};b_{11}) & (a_{12};b_{12}) & .... & (a_{1j};b_{1j}) & .... & (a_{1n};b_{1n}) \\ (a_{21};b_{21}) & (a_{22};b_{22}) & .... & (a_{2j};b_{2j}) & .... & (a_{2n};b_{2n}) \\ .... & .... & .... & .... & .... & .... \\ (a_{i1};b_{i1}) & (a_{i2};b_{i2}) & .... & (a_{ij};b_{ij}) & .... & (a_{ij};b_{ij}) \\ .... & .... & .... & .... & .... & .... \\ (a_{m1};b_{m1}) & (a_{m2};b_{m2}) & .... & (a_{mj};b_{mj}) & .... & (a_{mn};b_{mn}) \end{pmatrix}.$$

Первый игрок, выбирая i-ю строку, стремится максимизировать свой выигрыш a_{ij}. Второй игрок, выбирая j-й столбец, также стремится максимизировать свой выигрыш b_{ij}. Такие игры называются *биматричными* и более подробно будут рассмотрены в следующем параграфе.

9. Биматричные игры

Как отмечалось раньше, если у каждого из игроков число стратегий конечно, то игру можно представить в виде *биматричной игры*. Это значит, что заданы две матрицы $A = \{a_{ij}\}$ и $B = \{b_{ij}\}$, $i = \overline{1,m}$, $j = \overline{1,n}$. Первый игрок, выбирая i-ю строку, стремится максимизировать свой выигрыш a_{ij}. Второй игрок, выбирая j-й столбец, также стремится максимизировать свой выигрыш b_{ij}. Биматричную игру записывают с помощью одной матрицы

$$C = \begin{pmatrix} (a_{11};b_{11}) & (a_{12};b_{12}) & .... & (a_{1j};b_{1j}) & .... & (a_{1n};b_{1n}) \\ (a_{21};b_{21}) & (a_{22};b_{22}) & .... & (a_{2j};b_{2j}) & .... & (a_{2n};b_{2n}) \\ .... & .... & .... & .... & .... & .... \\ (a_{i1};b_{i1}) & (a_{i2};b_{i2}) & .... & (a_{ij};b_{ij}) & .... & (a_{ij};b_{ij}) \\ .... & .... & .... & .... & .... & .... \\ (a_{m1};b_{m1}) & (a_{m2};b_{m2}) & .... & (a_{mj};b_{mj}) & .... & (a_{mn};b_{mn}) \end{pmatrix}. \qquad (9.1)$$

Пример 1 (семейный спор). Муж (первый игрок) и жена (второй игрок) могут выбрать одно из двух развлечений: пойти на футбол или сходить на балет. Если они оба посетят футбол, то полученное мужем удовольствие будет в два раза выше удовольствия, полученного женой. В случае если они оба пойдут на балет, то жена получит удовольствие в два раза больше, чем муж. Если же они посетят эти мероприятия отдельно, то каждый получит нулевое удовольствие.

Матрица игры имеет следующий вид:

$$C = \begin{pmatrix} (2;1) & (0;0) \\ (0;0) & (1;2) \end{pmatrix}.$$

Выбор первой (второй) строки мужем означает, что он идёт на футбол (на балет). Выбор первого (второго) столбца женой означает, что она идёт на футбол (на балет).

Видно, что муж предпочёл бы, чтобы они пошли на футбол, а жена — на балет. Если жена будет уверена, что муж будет упорствовать и настаивать на футболе, то ей выгоднее с ним согласиться и пойти на футбол. Аналогичная ситуация и для случая, если жена будет настаивать на балете. Видим, что в такой ситуации выгоднее заранее раскрыть свои намерения и иметь репутацию непреклонного человека. Это соответствует стратегии силы: *я собираюсь сделать то-то, а вы решайте сами и делайте что угодно*.

Сформулируем определение точки равновесия по Нэшу применительно к биматричной игре (9.1).

Определение 1. Пара $(i_0;j_0)$ называется *точкой равновесия по Нэшу* в биматричной игре (9.1), если

$$a_{ij_0} \le a_{i_0 j_0} \text{ для всех } i = \overline{1,m}; \quad b_{i_0 j} \le b_{i_0 j_0} \text{ для всех } j = \overline{1,n}. \quad (9.2)$$

В качестве примера покажем, что точками равновесия по Нэшу в игре «Семейный спор» являются $i_0 = 1, j_0 = 1$ и $i_0 = 2, j_0 = 2$. В самом деле,

$$a_{21} = 0 < 2 = a_{11} \text{ и } b_{12} = 0 < 1 = b_{11};$$
$$a_{12} = 0 < 1 = a_{22} \text{ и } b_{21} = 0 < 2 = b_{22}.$$

Точки $i_0 = 1, j_0 = 2$ и $i_0 = 2, j_0 = 1$ не являются точками равновесия по Нэшу. В самом деле, $a_{12} = 0 < 1 = a_{22}$ и $b_{21} = 0 < 2 = b_{22}$.

Сделаем несколько замечаний касательно точек равновесия по Нэшу.

Замечание 1. Матричную игру с нулевой суммой можно рассматривать как биматричную игру, у которой $b_{ij} = -a_{ij}$. В этом случае точка равновесия по Нэшу становится седловой точкой в матричной игре.

Замечание 2. В матричной игре исход в седловой точке равен цене игры. Поэтому во всех седловых точках выигрыши игрока одни и те же. В биматричной игре с ненулевой суммой это не так. В игре «Семейный спор» в точке $i_0 = 1, j_0 = 1$ выигрыш первого игрока равен 2, а в точке $i_0 = 2, j_0 = 2$ этот выигрыш равен 1.

Замечание 3. В матричной игре в седловой точке $(i_0;j_0)$ выполнено условие

$$\min_{1\le j\le n} a_{i_0 j} = \max_{1\le i\le m} \min_{1\le j\le n} a_{ij}.$$

Это означает, что стратегия i_0 является максиминной стратегией первого игрока и обеспечивает ему наибольший гарантированный результат. В биматричных играх с ненулевой суммой это условие может не выполняться. Покажем это на следующем примере.

Пример 2 (производство конкурирующей продукции). Два небольших предприятия производят однотипную продукцию, которую продают на рынке. Каждое предприятие может использовать большую или малую поточную линию. Если оба предприятия используют большие линии ($i = 2$, $j = 2$), то происходит перенасыщение рынка и оба предприятия несут убыток в 9 денежных единиц. Если первое предприятие использует большую линию ($i = 2$), а второе использует малую ($j = 1$), то первое предприятие получит доход в 5 денежных единиц, а доход второго предприятия будет нулевым. Аналогично, если первое предприятие использует малую линию ($i = 1$), а второе предприятие использует большую (j = 2), то доход первого предприятия является нулевым, а доход второго равен 5 денежным единицам. Если же оба предприятия используют малые линии (i = 1, j = 1), то доход каждого предприятия составляет одну денежную единицу.

Матрица этой игры имеет следующий вид:

$$C = \begin{pmatrix} (1;1) & (0;5) \\ (5;0) & (-9;-9) \end{pmatrix}.$$

В этой игре имеются две ситуации равновесия по Нэшу (i_0 = 1, j_0 = 2) и (i_0 = 2, j_0 = 1). В самом деле, $a_{22} = -9 < 0 = a_{12}$ и $b_{11} = 1 < 5 = b_{12}$; $a_{11} = 1 < 5 = a_{21}$ и $b_{22} = -9 < 0 = b_{21}$.

Далее, $\min\limits_{1 \le j \le 2} a_{1j} = 0;\quad \min\limits_{1 \le j \le 2} a_{2j} = -9 \Rightarrow \max\limits_{1 \le i \le 2} \min\limits_{1 \le j \le 2} a_{ij} = 0.$

Стратегия i_0 = 1 является максиминной стратегией первого игрока. Стратегия i_0 = 2 не является максиминной стратегией первого игрока и не гарантирует выигрыш, равный 0.

Пример 3. Пусть матрица игры имеет следующий вид:

$$C = \begin{pmatrix} (4;1) & (1;2) \\ (2;8) & (3;4) \end{pmatrix}.$$

Найдём точку равновесия по Нэшу. Точка i_0 = 1, j_0 = 1 не является точкой равновесия по Нэшу, поскольку $b_{11} = 1 < 2 = b_{12}$. Для точки i_0 = 1, j_0 = 2 имеем $a_{12} = 1 < 3 = a_{22}$. Пусть i_0 = 2, j_0 = 1. Тогда $a_{21} = 2 < 4 = a_{11}$. Наконец, для точки i_0 = 2, j_0 = 2 выполнено неравенство $b_{22} = 4 < 8 = b_{21}$. Таким образом, в данном примере точки равновесия по Нэшу *в чистых стратегиях* не существует.

Как и в случае матричных игр, введём в рассмотрение смешанные стратегии игроков. Первый игрок выбирает i-ю строку с вероятностью λ_i. Второй игрок выбирает j-й столбец с вероятностью μ_j. Игроки делают выбор независимо друг от друга. Выигрышами игроков являются математические ожидания

$$H_1(\overline{\lambda}, \overline{\mu}) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \lambda_i \mu_j, \quad H_2(\overline{\lambda}, \overline{\mu}) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \lambda_i \mu_j.$$

В соответствии с общим определением пара смешанных стратегий $(\overline{\lambda}^0, \overline{\mu}^0)$ называется *ситуацией равновесия по Нэшу в смешанных стратегиях* тогда и только тогда, когда

$$\begin{aligned} &H_1(\overline{\lambda}, \overline{\mu}^0) \le H_1(\overline{\lambda}^0, \overline{\mu}^0) \text{ для } \forall \overline{\lambda} \in \Lambda_m; \\ &H_2(\overline{\lambda}^0, \overline{\mu}) \le H_2(\overline{\lambda}^0, \overline{\mu}^0) \text{ для } \forall \overline{\mu} \in M_n. \end{aligned} \tag{9.3}$$

Теорема 1. Для того чтобы пара смешанных стратегий $(\overline{\lambda}^0, \overline{\mu}^0)$ была ситуацией равновесия по Нэшу, необходимо и достаточно выполнение следующего неравенства:

$$\begin{aligned} &\sum_{s=1}^{n} a_{is}\mu_s^0 \le \sum_{k=1}^{m}\sum_{s=1}^{n} a_{ks}\lambda_k^0\mu_s^0, \quad \forall i = \overline{1,m}; \\ &\sum_{k=1}^{m} b_{kj}\lambda_k^0 \le \sum_{k=1}^{m}\sum_{s=1}^{n} b_{ks}\lambda_k^0\mu_s^0, \quad \forall j = \overline{1,n}. \end{aligned} \tag{9.4}$$

Доказательство. *Необходимость.* Пусть пара смешанных стратегий $(\overline{\lambda}^0, \overline{\mu}^0)$ является ситуацией равновесия по Нэшу. Положим в первом неравенстве (9.3) $\lambda_i = 1$, а все остальные $\lambda_k = 0$. Получим первую систему неравенств (9.4). Аналогично получаем вторую систему неравенств (9.4).

Достаточность. Возьмём любую смешанную стратегию $\overline{\lambda} \in \Lambda_m$. Умножим каждое i-е неравенство в первой группе неравенств (9.4) на число λ_i и сложим. Получим

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{s=1}^{n} a_{is}\lambda_i\mu_s^0 \le \left(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\right)\sum_{k=1}^{m}\sum_{s=1}^{n} a_{ks}\lambda_k^0\mu_s^0 = \sum_{k=1}^{m}\sum_{s=1}^{n} a_{ks}\lambda_k^0\mu_s^0.$$

Таким образом, $H_1(\overline{\lambda}, \overline{\mu}^0) \le H_1(\overline{\lambda}^0, \overline{\mu}^0)$. Аналогично доказывается второе неравенство в (9.3).

Согласно теореме 3 из параграфа 6, всякая биматричная игра имеет ситуацию равновесия в смешанных стратегиях

Решение биматричных игр второго порядка. Рассмотрим случай $n = m = 2$. Положим

$$\lambda_1 = \lambda,\ \lambda_2 = 1 - \lambda,\ 0 \le \lambda \le 1;$$
$$\mu_1 = \mu,\ \mu_2 = 1 - \mu,\ 0 \le \mu \le 1.$$

Тогда

$$\begin{aligned} H_1(\lambda,\mu) &= \sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2} a_{ij}\lambda_i\mu_j = (a_{11} - a_{12} - a_{21} + a_{22})\lambda\mu + \\ &+ (a_{12} - a_{22})\lambda + (a_{21} - a_{22})\mu + a_{22} = \\ &= A\lambda\mu - a\lambda + (a_{21} - a_{22})\mu + a_{22}; \end{aligned} \tag{9.5}$$

$$\begin{aligned} H_2(\lambda,\mu) &= \sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2} b_{ij}\lambda_i\mu_j = \\ &= (b_{11} - b_{12} - b_{21} + b_{22})\lambda\mu + (b_{12} - b_{22})\lambda + (b_{21} - b_{22})\mu + b_{22} = \\ &= B\lambda\mu - b\mu + (b_{12} - b_{22})\lambda + b_{22}; \end{aligned} \tag{9.6}$$

Здесь обозначено

$$A = a_{11} - a_{12} - a_{21} + a_{22},\ a = a_{22} - a_{12};$$
$$B = b_{11} - b_{12} - b_{21} + b_{22},\ b = b_{22} - b_{21}. \qquad (9.7)$$

Используя обозначения (9.5)–(9.7), запишем неравенства (9.4) в следующем виде:

$$a_{11}\mu + a_{12}(1-\mu) \le A\lambda\mu + (a_{12} - a_{22})\lambda + (a_{21} - a_{22})\mu + a_{22};$$
$$a_{21}\mu + a_{22}(1-\mu) \le A\lambda\mu + (a_{12} - a_{22})\lambda + (a_{21} - a_{22})\mu + a_{22};$$
$$b_{11}\lambda + b_{21}(1-\lambda) \le B\lambda\mu + (b_{12} - b_{22})\lambda + (b_{21} - b_{22})\mu + b_{22};$$
$$b_{12}\lambda + b_{22}(1-\lambda) \le B\lambda\mu + (b_{12} - b_{22})\lambda + (b_{21} - b_{22})\mu + b_{22}.$$

Отсюда получим, что

$$A\lambda\mu - A\mu + (a_{22} - a_{12})(1-\lambda) \ge 0;\ A\lambda\mu - (a_{22} - a_{12})\lambda \ge 0;$$
$$B\lambda\mu - B\lambda + (b_{22} - b_{12})(1-\mu) \ge 0;\ B\lambda\mu - (b_{22} - b_{12})\mu \ge 0.$$

Из этих неравенств следует, что

$$(A\mu - a)(\lambda - 1) \ge 0;\ \ (A\mu - a)\lambda \ge 0;$$
$$(B\lambda - b)(\mu - 1) \ge 0;\ \ (B\lambda - b)\mu \ge 0. \qquad (9.8)$$

Пример 4 (семейный спор). Матрица игры равна

$$C = \begin{pmatrix} (2;1) & (0;0) \\ (0;0) & (1;2) \end{pmatrix}.$$

Из формул (9.7) следует, что $A = 3$, $B = 3$, $a = 1$, $b = 2$. Поэтому неравенства (9.8) примут следующий вид:

$$(3\mu - 1)(\lambda - 1) \ge 0;\ (3\mu - 1)\lambda \ge 0;\quad (3\lambda - 2)(\mu - 1) \ge 0;\ (3\lambda - 2)\mu \ge 0.$$

На плоскости (λ,μ) нарисуем множество точек $0 \le \lambda \le 1$, $0 \le \mu \le 1$, которые удовлетворяют этим неравенствам.

Рассмотрим в начале два первых неравенства. Если $\lambda = 1$, то $\mu \ge \frac{1}{3}$. Если $\lambda = 0$, то $\mu \le \frac{1}{3}$. Если $0 < \lambda < 1$, то $\mu = \frac{1}{3}$. На рис. 9.1 полученные точки образуют ломаную *ODALC*.

Рассмотрим теперь два вторых неравенства. Если $\mu = 1$, то $\lambda \ge \frac{2}{3}$. Если $\mu = 0$, то $\lambda \le \frac{2}{3}$. Если $0 < \mu < 1$, то $\lambda = \frac{2}{3}$. На рис. 9.1 полученные точки образуют ломаную *OEABC*. Точки пересечения указанных ломаных являются точками равновесия по Нэшу. Данная игра имеет три точки равновесия по Нэшу:

1) $\lambda = 0,\ \mu = 0 \Rightarrow H_1(0,0) = 1,\ H_2(0,0) = 2;$

2) $\lambda = 1,\ \mu = 1 \Rightarrow H_1(1,1) = 2,\ H_2(1,1) = 1;$

3) $\lambda = \dfrac{2}{3}$, $\mu = \dfrac{1}{3} \Rightarrow H_1\left(\dfrac{2}{3},\dfrac{1}{3}\right) = \dfrac{2}{3}$, $H_2\left(\dfrac{2}{3},\dfrac{1}{3}\right) = \dfrac{2}{3}$.

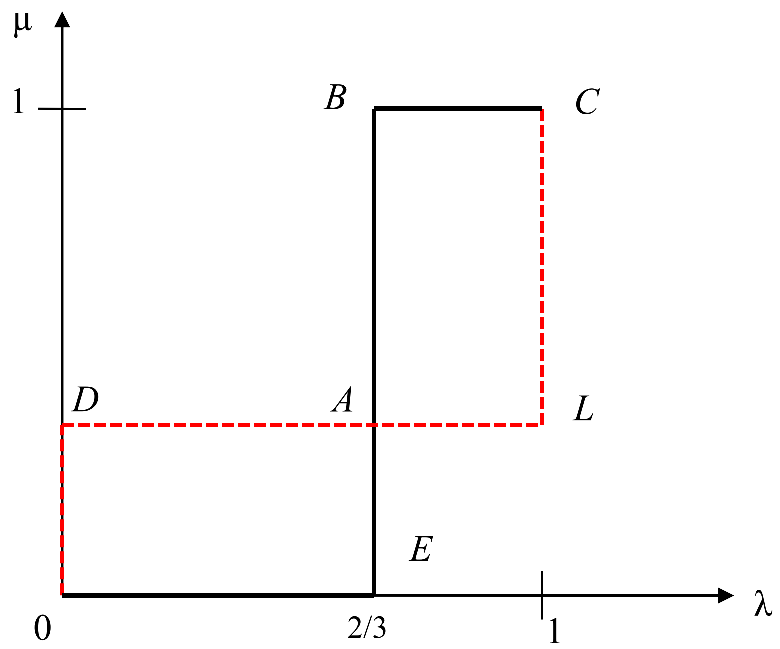

Рис. 9.1

Пример 5 (производство конкурирующей продукции). Матрица этой игры равна $C = \begin{pmatrix} (1;1) & (0;5) \\ (5;0) & (-9;-9) \end{pmatrix}$.

Из формул (9.7) следует, что $A = -13$, $a = -9$, $B = -13$, $b = -9$. Поэтому неравенства (9.8) примут следующий вид:

$$(-13\mu + 9)(\lambda - 1) \geq 0; \quad (-13\mu + 9)\lambda \geq 0;$$
$$(-13\lambda + 9)(\mu - 1) \geq 0; \quad (-13\lambda + 9)\mu \geq 0.$$

На рис. 9.2 изображено множество точек (λ,μ), $0 \leq \lambda \leq 1$, $0 \leq \mu \leq 1$, удовлетворяющих этим неравенствам. Как видно из этого рисунка, имеются три ситуации равновесия по Нэшу в смешанных стратегиях:

1) $\lambda = 0$, $\mu = 1 \Rightarrow H_1(0,1) = 5$, $H_2(0,1) = 0$;

2) $\lambda = 1$, $\mu = 0 \Rightarrow H_1(1,0) = 0$, $H_2(1,0) = 5$;

3) $\lambda = \dfrac{9}{13}$, $\mu = \dfrac{9}{13} \Rightarrow H_1\left(\dfrac{9}{13},\dfrac{9}{13}\right) = \dfrac{9}{13}$, $H_2\left(\dfrac{9}{13},\dfrac{9}{13}\right) = \dfrac{9}{13}$.

Пример 6 (дилемма узников). Два узника подозреваются в совершении преступления. Если они оба молчат ($i = 1$, $j = 1$), то наказание каждому составляет один год. Если оба сознаются ($i = 2$, $j = 2$), то наказание каждому составляет шесть лет. Если первый сознается, а второй нет ($i = 2$, $j = 1$), то первый освобождается от наказания, а наказание второму составляет девять лет. Если второй сознается, а первый нет ($i = 1$, $j = 2$), то второй освобождается от наказания, а наказание первому составляет девять лет.

Матрица игры равна $C = \begin{pmatrix} (-1;-1) & (-9;0) \\ (0;-9) & (-6;-6) \end{pmatrix}$.

Из формул (9.7) следует, что $A = 2$, $a = 3$, $B = 2$, $b = 3$. Поэтому неравенства (9.8) примут следующий вид:

$$(2\mu - 3)(\lambda - 1) \ge 0; \quad (2\mu - 3)\lambda \ge 0; \quad (2\lambda - 3)(\mu - 1) \ge 0; \quad (2\lambda - 3)\mu \ge 0.$$

На рис. 9.3 изображено множество точек (λ,μ), $0 \le \lambda \le 1$, $0 \le \mu \le 1$, удовлетворяющих этим неравенствам. Единственная точка равновесия по Нэшу: $\lambda = 0$, $\mu = 0 \Rightarrow H_1(0,0) = -6$, $H_2(0,0) = -6$. Эта ситуация означает, что оба должны сознаться.

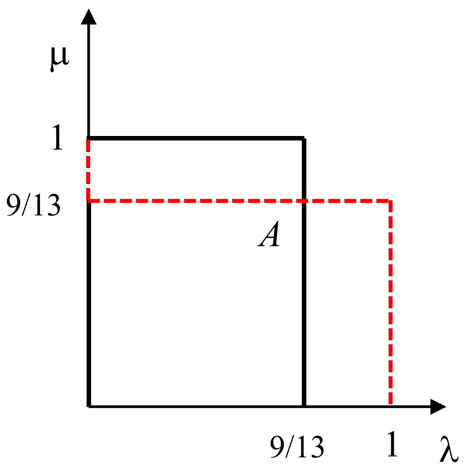

Рис. 9.2

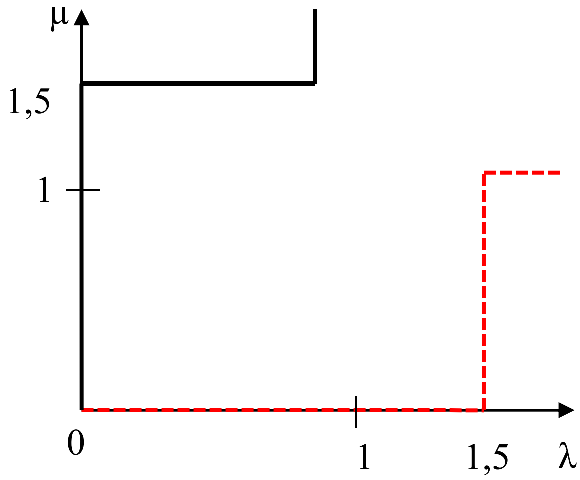

Рис. 9.3

Пример 7 (проникновение фирмы на новый рынок). Фирма-аутсайдер (первый игрок) хочет принять решение о вступлении ($i = 1$) или о не вступлении ($i = 2$) на рынок, где уже действует фирма-монополист (второй игрок), которая может отреагировать на это дружелюбно ($j = 1$) или агрессивно ($j = 2$). На рис. 9.4 указаны результаты поведения фирм.

Матрица этой игры равна $C = \begin{pmatrix} (2;3) & (-1;1) \\ (1;5) & (1;5) \end{pmatrix}$.

Из формул (9.7) следует, что $A = 3$, $a = 2$, $B = 2$, $b = 0$. Поэтому неравенства (9.8) примут следующий вид:

$$(3\mu - 2)(\lambda - 1) \ge 0; \quad (3\mu - 2)\lambda \ge 0;$$
$$2\lambda(\mu - 1) \ge 0; \quad 2\lambda\mu \ge 0.$$

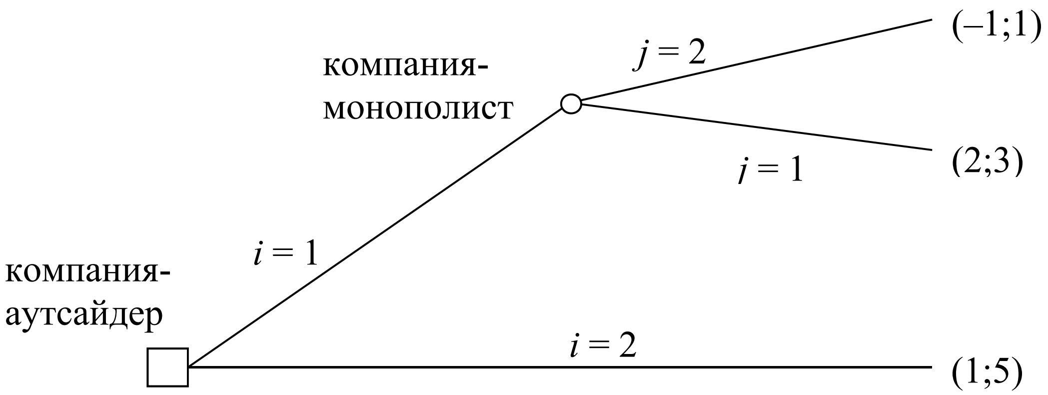

Рис. 9.4

На рис. 9.5 изображено множество точек (λ,μ), $0 \le \lambda \le 1$, $0 \le \mu \le 1$, удовлетворяющих этим неравенствам.

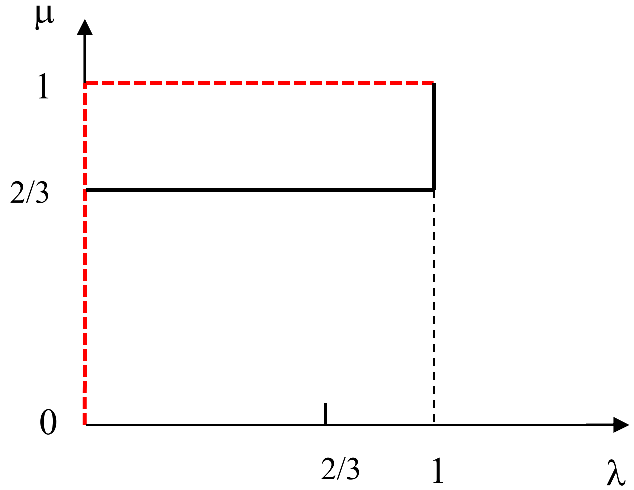

Рис. 9.5

Как видно из этого рисунка, есть много ситуаций равновесия по Нэшу в смешанных стратегиях:

1) $\lambda = 1,\ \mu = 1 \Rightarrow H_1(1,1) = 2,\ H_2(1,1) = 3$;

2) $\lambda = 0,\ 0 \le \mu \le \frac{2}{3} \Rightarrow H_1(1,\mu) = 1,\ H_2(1,\mu) = 5$.

Пример 8. Пусть матрица игры имеет следующий вид:

$$C = \begin{pmatrix} (4;1) & (1;2) \\ (2;8) & (3;4) \end{pmatrix}.$$

Имеем $A = 4$, $a = 2$, $B = -5$, $b = -4$. Поэтому неравенства (9.8) примут следующий вид:

$$(4\mu - 2)(\lambda - 1) \ge 0;\ (4\mu - 2)\lambda \ge 0;\quad (-5\lambda + 4)(\mu - 1) \ge 0;\ (-5\lambda + 4)\mu \ge 0.$$

На рис. 9.6 изображено множество точек (λ,μ), $0 \le \lambda \le 1$, $0 \le \mu \le 1$, удовлетворяющих этим неравенствам.

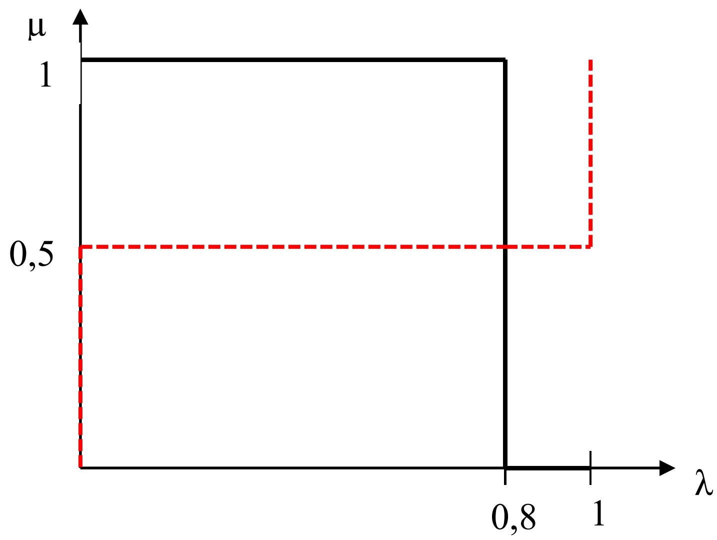

Рис. 9.6

Как видно из рис. 9.6, имеется только одна ситуация равновесия по Нэшу в смешанных стратегиях: $\lambda = 0{,}8$, $\mu = 0{,}5 \Rightarrow H_1(0{,}8{,}0{,}5) = 2{,}5$, $H_2(0{,}8{,}0{,}5) = 7{,}4$.

После рассмотрения этих примеров проведём анализ неравенств (9.8). Рассмотрим случай, когда

$$A \neq 0,\ \ B \neq 0,\ \ 0 < \frac{a}{A} < 1,\ \ 0 < \frac{b}{B} < 1. \tag{9.9}$$

В этом случае существует точка равновесия по Нэшу в смешанных

$$\lambda = \frac{b}{B},\ \ \mu = \frac{a}{A}. \tag{9.10}$$

Из этих формул видно, что смешанная стратегия игрока полностью определяется матрицей выигрыша другого игрока. Иными словами, равновесная по Нэшу ситуация определяется не столько стремлением увеличить свой выигрыш, сколько желанием держать под контролем выигрыш другого игрока.

Вычислим для стратегий (9.10) величины выигрышей игроков. Из формул (9.9) и (9.10) следует, что

$$H_1\left(\frac{b}{B},\frac{a}{A}\right) = A\frac{b}{B}\frac{a}{A} - a\frac{b}{B} + (a_{21} - a_{22})\frac{a}{A} + a_{22} = \frac{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}{A} = \frac{\det A}{tr_1 A - tr_2 A};$$

$$H_2\left(\frac{b}{B},\frac{a}{A}\right) = B\frac{b}{B}\frac{a}{A} - B\frac{a}{A} + (b_{12} - b_{22})\frac{b}{B} + b_{22} = \frac{b_{11}b_{22} - b_{12}b_{21}}{B} = \frac{\det B}{tr_1 B - tr_2 B}.$$

Здесь обозначено

$$tr_1 A = a_{11} + a_{22},\ tr_2 A = a_{12} + a_{21},$$
$$tr_1 B = b_{11} + b_{22},\ tr_2 B = b_{12} + b_{21}.$$

10. Максимальные по Парето стратегии

Рассмотрим биматричную игру

$$C=\begin{pmatrix} (a_{11};b_{11}) & (a_{12};b_{12}) & \dots & (a_{1j};b_{1j}) & \dots & (a_{1n};b_{1n}) \\ (a_{21};b_{21}) & (a_{22};b_{22}) & \dots & (a_{2j};b_{2j}) & \dots & (a_{2n};b_{2n}) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ (a_{i1};b_{i1}) & (a_{i2};b_{i2}) & \dots & (a_{ij};b_{ij}) & \dots & (a_{ij};b_{ij}) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ (a_{m1};b_{m1}) & (a_{m2};b_{m2}) & \dots & (a_{mj};b_{mj}) & \dots & (a_{mn};b_{mn}) \end{pmatrix} \qquad (10.1)$$

в чистых стратегиях.

Оптимальность по Парето. В соответствии с общим определением оптимальности по Парето пара стратегий ($i_*;j_*$) называется *максимальной по Парето* в биматричной игре (10.1), если для любой пары стратегий ($i;j$) система неравенств $a_{i_*j_*} \le a_{ij}$; $b_{i_*j_*} \le b_{ij}$, в которой хотя бы в одном из них стоит строгое неравенство, является несовместной.

Это означает, что максимальная по Парето пара стратегий не может быть улучшена по критерию одного игрока без ухудшения по критерию другого игрока.

Пример 1 (неантагонистическая конкуренция двух фирм в условиях ограниченного времени сбыта). Рассмотрим пример 5 из параграфа 5 о двух фирмах, производящих сезонный товар. Считаем, что цель каждой фирмы заключается в увеличении своего дохода.

Рассмотрим случай $n = 4$ и $c = 1$. Тогда матрицы A и B, представляющие собой доходы фирм, будут иметь вид

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1{,}5 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0{,}5 \end{pmatrix}, \qquad B=\begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1{,}5 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 0{,}5 \end{pmatrix}.$$

Видим, что $a_{ij} + b_{ij} \ne 0$.

Нанесём на плоскости (a,b) точки с координатами $a = a_{ij}$, $b = b_{ij}$. Получим картинку, изображённую на рис. 10.1. Из этого рисунка видно, что максимальные по Парето парами стратегий будут те, которым соответствуют точки m_3, m_7, m_6. Точке m_3 соответствуют две пары стратегий ($i = 1$; $j = 2$), ($i = 4$;$j = 1$). Точке m_7 соответствуют три пары стратегий ($i = 1$; $j = 1$), ($i = 1$; $j = 3$) и ($i = 3$; $j = 1$). Точке m_6 соответствуют две пары стратегий ($i = 1$; $j = 4$), ($i = 2$; $j = 1$).

Можно выделить два этапа рассмотрения биматричной игры.

Первый этап базируется на отношении доминирования по Парето пар стратегий игроков. На этом этапе игроки выступают как партнёры. Находится множество максимальных по Парето пар стратегий.

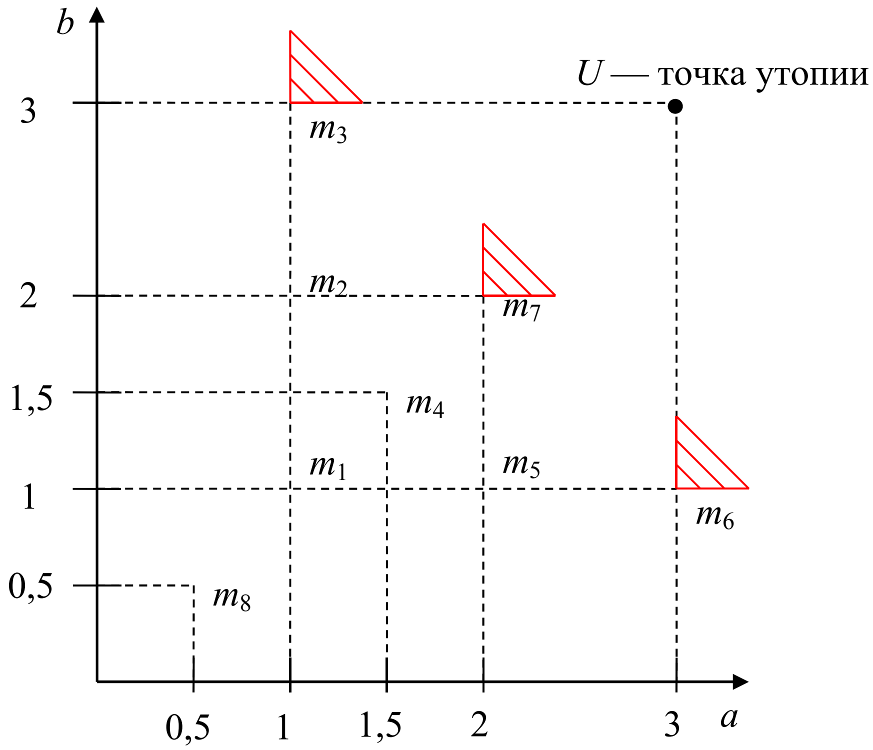

Рис. 10.1

Второй этап заключается в решении вопроса, какую максимальную по Парето пару стратегий брать? Любые две максимальные по Парето пары стратегий не сравнимы по Парето, то есть увеличение выигрыша одного игрока влечёт уменьшение выигрыша другого. При сравнении двух максимальных по Парето пар стратегий игроки из союзников превращаются в противников.

Эту ситуацию можно проиллюстрировать словами песни В. Высоцкого:

Если друг оказался вдруг
И не друг и не враг — а так
Парня в горы бери с собой
Там поймёшь кто такой.

Одним из подходов выбора максимальной по Парето пары стратегий является *метод идеальной точки.* Ищется точка

$$a_{\max} \max_{i,j} a_{ij}, \quad b_{\max} \max_{i,j} b_{ij}.$$

На плоскости (a,b) точка с координатами $(a_{\max},b_{\max})$ называется *точкой утопии*. Затем из множества максимальных по Парето точек (a,b) ищется ближайшая к точке утопии точка (a_u,b_u), которая называется *идеальной точкой*. Игрокам предлагается брать те пары стратегий (i,j), для которых $a_u = a_{ij}$, $b_u = b_{ij}$.

В примере 1 (см. рис. 10.1) точкой утопии является точка с координатами (3;3). Идеальной точкой является точка m_7, которой соответствуют три пары стратегий $(i = 1; j = 1)$, $(i = 1; j = 3)$ и $(i = 3; j = 1)$. Отметим, что эти пары удовлетворяют принципу равенства ($a_{ij} = b_{ij} = 2.$).

Рассмотрим теперь биматричную игру (10.1) в смешанных стратегиях. Первый игрок выбирает i-ю строку с вероятностью λ_i. Второй игрок выбирает j-й столбец с вероятностью μ_j. Игроки делают выбор независимо друг от друга. Тогда число $z_{ij} = \lambda_i\mu_j$ является вероятностью события, заключающегося в том, что будет выбрана i-я строка и j-й столбец.

В биматричной игре (10.1) в смешанных стратегиях гарантированные выигрыши игроков равны

$$\nu_A = \max_{\bar{\lambda}} \min_{\bar{\mu}} \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\lambda_i\mu_j, \quad \nu_B = \max_{\bar{\lambda}} \min_{\bar{\lambda}} \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\lambda_i\mu_j. \qquad (10.2)$$

На плоскости $(a;b)$ точка M с координатами $(\nu_A;\nu_B)$ называется *точкой status quo*.

Пусть пара стратегий $(\bar{\lambda}^0,\bar{\mu}^0)$ является ситуацией равновесия по Нэшу в смешанных стратегиях. Положим

$$a_0 = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\lambda_i^0\mu_j^0, \quad b_0 = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\lambda_i^0\mu_j^0\mu_j^0. \qquad (10.3)$$

В параграфе 6 в общем случае было показано, что точка $(a_0;b_0)$ доминирует точку *status quo* $(\nu_A;\nu_B)$, то есть $\nu_A \le a_0$, $\nu_B \le b_0$.

Рассмотрим более общий случай, когда на множестве чистых стратегий можно реализовать произвольное вероятностное распределение z_{ij}, а не только произведение независимых распределений. Такой подход означает проявление *эффекта кооперации* игроков. В этом случае на плоскости (a,b) получим множество

$$D = \left\{ (a,b) \middle| a = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}z_{ij},\ b = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} b_{ij}z_{ij} :\ z_{ij} \ge 0,\ \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} z_{ij} = 1 \right\}. \quad (10.4)$$

Это множество является выпуклым многоугольником с вершинами в точках (a_{ij},b_{ij}). Его максимальные по Парето точки составляют северо-восточную границу. Из этого множества максимальных по Парето точек (a,b) ищется ближайшая к точке утопии точка (a_*,b_*). Эта точка называется *идеальной точкой* в смешанных стратегиях. Игрокам предлагается брать те смешанные стратегии (10.2), у которых

$$a_* = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij} z_{ij}, \; b_* = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} b_{ij} z_{ij}.$$

Пример 2. В примере 1 идеальная точка в смешанных стратегиях совпадает с идеальной точкой в чистых стратегиях (см. рис 10.2).

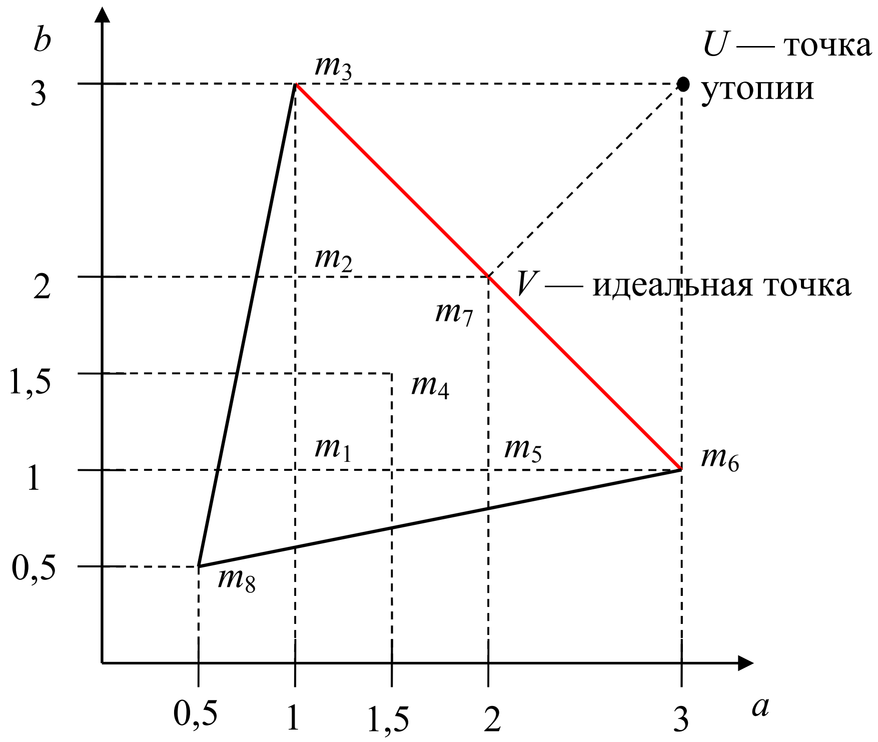

Рис. 10.2

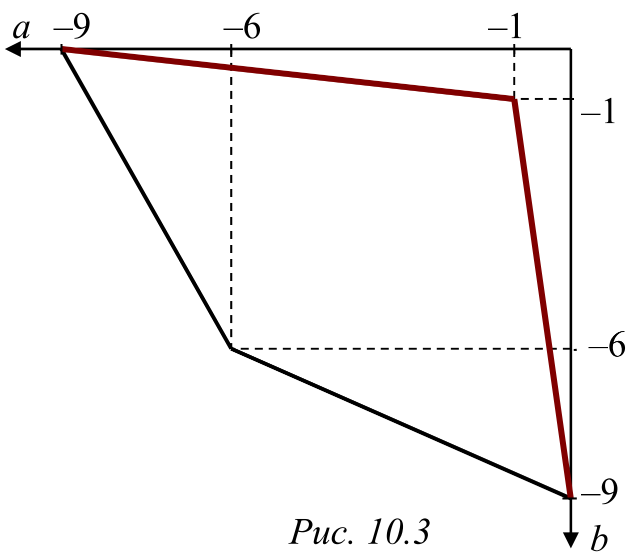

Рис. 10.3

Пример 3. Рассмотрим игру «Дилемма узников» (пример 6 из параграфа 9). Область D изображена на рис. 10.3. Точкой утопии является точка (0;0). Идеальной точкой является точка (–1;–1). Ей соответствует пара стратегий (i = 1; j = 1). Это означает, что обоим игрокам нужно молчать. Эта точка лучше для обоих игроков, чем равновесная по Нэшу точка (–6;–6).

Пример 4 (семейный спор 2). Муж (первый игрок) и жена (второй игрок) могут выбрать одно из трёх мероприятий: остаться дома, пойти в гости к маме мужа или сходить в гости к маме жены. Если они останутся дома ($i = 1, j = 1$), то оба получат одинаковое удовольствие, которое оценивается числом 2. Если муж останется дома ($i = 1$), а жена пойдёт в гости к маме мужа ($j = 2$), то полученное мужем удовольствие оценивается числом 2, а полученное женой удовольствие — числом 0. Если муж останется дома ($i = 1$), а жена пойдёт в гости к своей маме ($j = 3$), то полученное мужем удовольствие — числом (–1), а полученное женой удовольствие оценивается числом 3. Оставшиеся случаи оцениваются аналогично. Итоговая матрица игры имеет следующий вид:

$$C = \begin{pmatrix} (2,2) & (2,0) & (-1,3) \\ (3,-1) & (3,1) & (1,1) \\ (0,2) & (-1,-1) & (1,3) \end{pmatrix}.$$

Выбор первой, второй или третьей строки мужем означает, что он, соответственно, остаётся дома, идёт к своей маме или идёт к маме жены. Выбор первого, второго или третьего столбца женой означает, что она, соответственно, остаётся дома, идёт к маме мужа или идёт к своей маме.

Нанесём на плоскость (a,b) точки (a_{ij},b_{ij}), $i,j = 1,2,3$ (см. рис. 10.4).

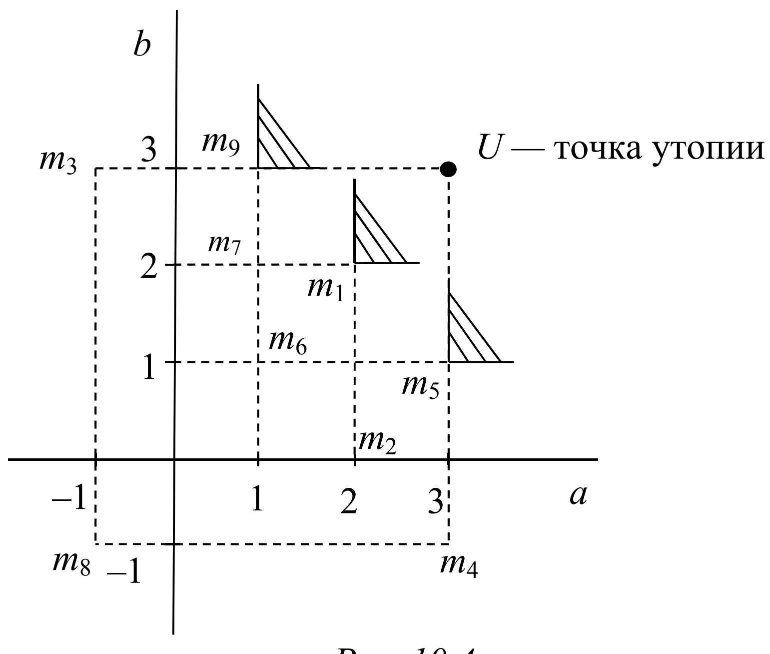

Рис. 10.4

Максимальными по Парето парами стратегий являются те, которым соответствуют точки m_9, m_1, m_5. Точке $m_9 = (1;3)$ соответствует пара стратегий ($i = 3, j = 3$); точке $m_1 = (2;2)$ соответствует пара стратегий ($i = 1, j = 1$); точке $m_5 = (3;1)$ соответствует пара стратегий ($i = 2$, $j = 2$). Таким образом, максимальное по Парето поведение в данном примере означает, что они должны быть вместе.

Найдём точку утопии

$$U = (a_{\max}, b_{\max}),$$

где $a_{\max} \max\limits_{i,j} a_{ij} = 3$, $b_{\max} \max\limits_{i,j} b_{ij} = 3$.

Ближайшей к ней точкой из множества Парето-максимальных точек $\{m_9, m_1, m_5\}$ является точка $m_1 = (2;2)$, которой соответствует пара стратегий ($i = 1$, $j = 1$). Эта пара стратегий диктует игрокам остаться дома.

Множество D, определяемое формулами (10.2), для рассматриваемой игры приведено на рис. 10.5.

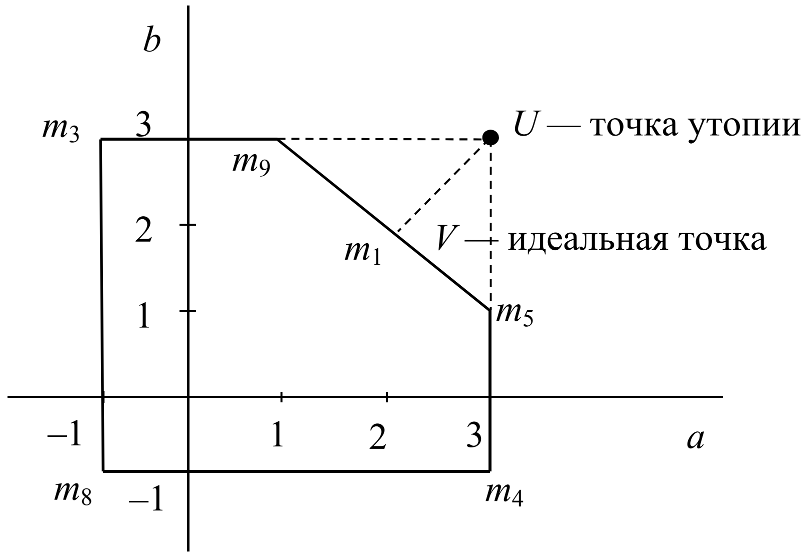

Рис. 10.5

11. Арбитражная схема Нэша

Предположим, что игроки торгуются о том, какую точку им выбрать из множества D, определяемого формулой (8.4) из параграфа 8. Они могут согласиться на максимальные по Парето точки этого множества. Однако при выборе конкретной точки из множества максимальных по Парето точек возникает проблема, поскольку увеличение выигрыша одного игрока уменьшает выигрыш другого. Одним из способов выхода из этого тупика является обращение игроков к арбитру — беспристрастному постороннему лицу, которое может разрешить конфликт, предложив игрокам некоторое решение. Математически это означает, что имеется арбитражная схема, которая связывает с каждой игрой двух лиц с нестрогим соперничеством единственный платёж игрокам.

Перейдём к рассмотрению *арбитражной схемы Нэша.* Решение, получаемое по этой схеме, будем называть *арбитражным решением Нэша*.

Для каждого множеств $K \subset R^2$ рассмотрим множество $\aleph(K)$ тех точек плоскости, каждая из которых доминируется некоторой точкой из множества K, то есть (см. рис. 11.1)

$$\aleph(K) = \{(x,y) \in R^2 | \, \exists (u,v) \in K\colon u \geq x,\, v \geq y\}. \qquad (11.1)$$

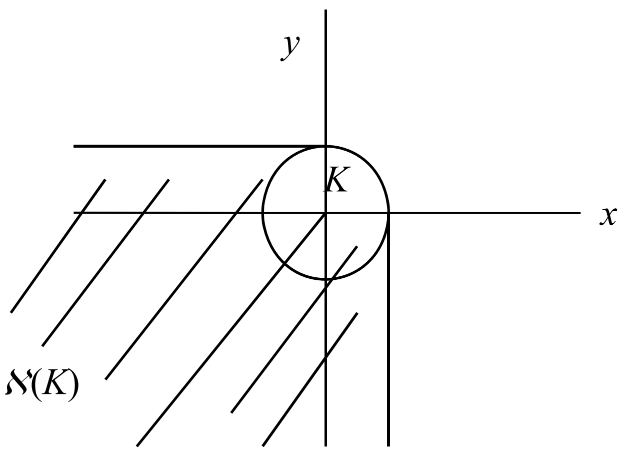

Рис. 11.1

Отметим некоторые свойства множества (11.1).

1. $K \subset \aleph(K)$; $K_* \subset K \Rightarrow \aleph(K_*) \subset \aleph(K)$.

2. Если множество K является компактом, то множество $\aleph(K)$ является замкнутым.

В самом деле, пусть последовательность точек $(x_n,y_n) \in \aleph(K)$ и $(x_n,y_n) \to (x,y)$. Тогда существует последовательность точек $(u_n,v_n) \in K$

такая, что $u_n \geq x_n$, $v_n \geq y_n$. Поскольку множество K является компактом, то, переходя, если нужно, к подпоследовательности, можно считать, что $(u_n,v_n) \to (u,v) \in K$. Для предельных точек выполнены неравенства $u \geq x$, $v \geq y$. Следовательно, предельная точка $(x,y) \in \aleph(K)$.

3. Если множество K является выпуклым, то выпуклым является и множество $\aleph(K)$.

В самом деле, пусть две точки $(x_i,y_i) \in \aleph(K)$. Тогда найдутся две точки $(u_i,v_i) \in K$ такие, что $u_i \geq x_i$, $v_i \geq y_i$. Поэтому для любого числа $\lambda \in [0,1]$ выполнены неравенства $\lambda u_1 + (1-\lambda)u_2 \geq \lambda x_1 + (1-\lambda)x_2$, $\lambda v_1 + (1-\lambda)v_2 \geq \lambda y_1 + (1-\lambda)y_2$. Отсюда и из того, что точка $(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2, \lambda y_1 + (1-\lambda)y_2) \in K$ следует, что точка $(\lambda u_1 + (1-\lambda)u_2, \lambda v_1 + (1-\lambda)v_2) \in \aleph(K)$.

4. Для любого множества $Z \subset R^2$ точка $\overline{\beta} = (\beta_1,\beta_2) \in R^2$обозначим

$$Z + \overline{\beta} = \{(x,y) \in R^2 |\, x = u + \beta_1,\, y = v + \beta_2 : \exists\, (u,v) \in Z\}.$$

Тогда $\aleph(K + \overline{\beta}) = \aleph(K) + \overline{\beta}$.

В самом деле, имеем $(x,y) \in \aleph(K) + \overline{\beta} \Leftrightarrow (x - \beta_1, y - \beta_2) \in \aleph(K) \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow u \geq x - \beta_1$, $v \geq y - \beta_2$ для некоторой точки $(u,v) \in K \Leftrightarrow u_1 \geq x$, $v_1 \geq y$ для некоторой точки $(u_1,v_1) \in K + \overline{\beta} \Leftrightarrow (x,y) \in \aleph(K + \overline{\beta})$.

5. Для любого множества $Z \subset R^2$ и для любой матрицы $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ обозначим $AZ = \{(x,y) \in R^2 |\, x = a_{11}u + a_{12}v,\, y = a_{21}u + a_{22}v : \exists (u,v) \in Z\}$.

Тогда, если $A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$ или $A = \begin{pmatrix} 0 & a \\ b & 0 \end{pmatrix}$, где числа $a > 0$, $b > 0$, то $\aleph(AK) = A\,\aleph(K)$.

В самом деле, пусть матрица A имеет неотрицательные коэффициенты. Тогда $(x_+,y_+) \in A\,\aleph(K) \Rightarrow x_+ = a_{11}u + a_{12}v$, $y_+ = a_{21}u + a_{22}v$ для некоторой точки $(u,v) \in \aleph(K) \Rightarrow x_+ = a_{11}u + a_{12}v$, $y_+ = a_{21}u + a_{22}v$ при некоторой точке (u,v), удовлетворяющей неравенствам $x \geq u$, $y \geq v$ для некоторой точки $(x,y) \in K \Rightarrow x^+ \geq x_+$, $y^+ \geq y_+$ для некоторой точки $(x^+,y^+) \in AK \Rightarrow (x_+,y_+) \in \aleph(AK)$.

Обратная матрица $A^{-1} = \begin{pmatrix} a^{-1} & 0 \\ 0 & b^{-1} \end{pmatrix}$ или $A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & b^{-1} \\ a^{-1} & 0 \end{pmatrix}$ имеет положительные коэффициенты. Из только что доказанного включения следует, что $A^{-1}\aleph(AK) \subset \aleph(A^{-1}(AK)) = \aleph(K)$. Отсюда получим, что $\aleph(AK) \subset A\,\aleph(K)$.

Определение 1. Множество $K \subset R^2$ называется симметричным относительно биссектрисы первого координатного угла, если из того, что точка $(x,y) \in K$ следует включение $(y,x) \in K$.

6. Если множество $K \subset R^2$ является симметричным относительно биссектрисы первого координатного угла, то симметричным относительно биссектрисы первого координатного угла является множество $\aleph(K)$.

В самом деле, пусть точка $(x,y) \in \aleph(K)$. Тогда из формулы (11.1) следует, что $u \geq x$, $v \geq y$ для некоторой точки $(u,v) \in K$. Из симметрии множества K следует, что точка $(v,u) \in K$. Отсюда, используя неравенства $v \geq y$ и $u \geq x$, получим включение $(y,x) \in \aleph(K)$.

Замечание 1. Будем говорить, что точка $(x,y) \in R^2$ доминирует по Парето точку $(a;b) \in R^2$, если $x \geq a$ и $y \geq b$, причём хотя бы в одном из этих неравенств стоит знак строгого неравенства.

Арбитражная схема Нэша для каждого выпуклого компакта $K \subset R^2$ и для каждой точки $(x,y) \in \aleph(K)$ указывает единственную точку $(x_*,y_*) \in$ $\in K$, которая интерпретируется как оптимальная ситуация. В формализованном виде арбитражное решение Нэша является функцией F, которая каждому выпуклому компакту $K \subset R^2$ и каждой точке $(x,y) \in$ $\in \aleph(K)$ ставит в соответствие единственную точку $(x_*,y_*) \in K$. Будем обозначать

$$(x_*,y_*) = F[(x,y);K] = (F_x[(x,y);K];F_y\,[(x,y);K]).$$

Считается, что арбитражное решение должно удовлетворять следующим условиям.

Условие 1 (индивидуальная рациональность). Для любой точки $(x,y) \in \aleph(K)$ выполнены неравенства

$$x \leq F_x[(x,y);K],\ y \leq F_y[(x,y);K].$$

Условие 2 (коллективная рациональность). Для любой точки (x,y) $\in \aleph(K)$ не существует точки $(u,v) \in K$ такой, чтобы она доминировала по Парето точку $F[(x,y);K]$.

Условие 3. Пусть K и K_1 — выпуклые компакты; F и $F^{(1)}$ — арбитражные решения Нэша на них. Пусть существует линейное преобразование

$$x_1 = \alpha_1 x + \beta_1,\ y_1 = \alpha_2 y + \beta_2,\ \alpha_1 > 0,\ \alpha_2 > 0 \tag{11.2}$$

такое, что

$$K_1 = \{(x_1,y_1) \in R^2 \colon x_1 = \alpha_1 x + \beta_1,\ y_1 = \alpha_2 y + \beta_2,\ (x,y) \in K\}. \tag{11.3}$$

Тогда

$$F_x^{(1)}[(\alpha_1 x + \beta_1;\ \alpha_2 y + \beta_2);K_1] = \alpha_1 F_x[(x,y);K] + \beta_1,$$
$$F_y^{(1)}[(\alpha_1 x + \beta_1;\alpha_2 y + \beta_2);K_1] = \alpha_2 F_y[(x,y);K] + \beta_2. \tag{11.4}$$

Смысл этого условия заключается в том, что арбитражное решение не должно зависеть от выбора начала отсчёта и от масштаба измерений выигрышей.

Замечание 2. Из вида линейного преобразования (11.2) и из свойств 4 и 5 множества $\aleph(K)$ следует равенство

$$\aleph(K_1) = \{(x^1,y^1) \in R^2: x^1 = \alpha_1 x + \beta_1,\ y^1 = \alpha_2 y + \beta_2,\ (x,y) \in \aleph(K)\}.$$

Условие 4 (симметрия). Если множество K симметрично относительно биссектрисы первого координатного угла, то $F_x[(t,t);K] = F_y[(t,t);K]$ для любой точки $(t,t) \in \aleph(K)$.

Условие 5 (независимость от посторонних альтернатив). Пусть выпуклый компакт $K_* \subset K$ и для некоторой точки $(x,y) \in \aleph(K_*)$ выполнено условие $F[(x,y);K] \in K_*$. Тогда $F[(x,y);K_*] = F[(x,y);K]$.

Другими словами, добавление новых исходов не должно менять предпочтение старых.

Теорема 1. Пусть множество K является выпуклым компактом. Тогда арбитражное решение Нэша существует и единственно.

Доказательство. Для каждой точки $(x,y) \in \aleph(K)$ рассмотрим следующую оптимизационную задачу:

$$w(x,y) = \max(u - x)(v - y);\ (u,v) \in K,\ u \ge x,\ v \ge y. \qquad (11.5)$$

Из того, что множество K является компактом, следует, что решение (u_0,v_0) в задаче (11.5) существует. Возможны два случая.

Пусть $w = w(x,y) > 0$. Покажем, что максимальное значение в задаче (11.5) достигается в единственной точке $u_0 = x_*$, $v_0 = y_*$. Отметим, что в рассматриваемом случае выполнены неравенства $u_0 > x$, $v_0 > y$. Допустим, что существует ещё точка $(u_1,v_1) \in K$, $u_1 > x$, $v_1 > y$ такая, что $w = (u_1 - x)(v_1 - y) = (u_0 - x)(v_0 - y)$.

При $w > 0$ функция w/t является строго выпуклой при $t > 0$. Это значит, что если $0 < \lambda < 1$ и $t_1 > 0$, $t_2 > 0$, то

$$\frac{w}{\lambda t_1 + (1-\lambda)t_2} < \lambda\frac{w}{t_1} + (1-\lambda)\frac{w}{t_2} \Rightarrow w < \left(\lambda\frac{w}{t_1} + (1-\lambda)\frac{w}{t_2}\right)(\lambda t_1 + (1-\lambda)t_2).$$

Возьмём $t_i = u_i - x$, $i = 0,1$. Тогда $w/t_1 = v_i - y$. Отсюда и из предыдущего неравенства получим, что

$$w < (\lambda(v_1 - y) + (1 - \lambda)(v_0 - y))(\lambda(u_1 - x) + (1 - \lambda)(u_0 - x)) =$$
$$= (\lambda v_1 + (1 - \lambda)v_0 - y)(\lambda u_1 + (1 - \lambda)u_0 - x).$$

Компакт K является выпуклым. Поэтому точка $(\lambda u_1 + (1 - \lambda)u_0;\ \lambda v_1 + + (1 - \lambda)v_0) \in K$.

В этой точке значение целевой функции в задаче (11.5) больше w. Получили противоречие.

При $w = 0$ максимальное значение достигается либо при $u = x$, либо при $v = y$. Пусть $u = x$. Положим в этом случае

$$x_* = x,\ y_* = \max\{z\colon z \ge y,\ (x,z) \in K\}. \tag{11.6}$$

Аналогично при $v = y$ положим

$$x_* = \max\{z\colon z \ge x,\ (z,y) \in K\},\ y_* = y. \tag{11.7}$$

Таким образом, каждой точке $(x,y) \in \aleph(K)$ поставили в соответствие единственную точку $(x_*,y_*) \in K$. Обозначим

$$x_* = F_x[(x,y);K],\ y_* = F_y[(x,y);K]. \tag{11.8}$$

Покажем, что решение (11.8) удовлетворяет сформулированным условиям 1–5.

Условие 1. Неравенства $x \le F_x[(x,y);K]$, $y \le F_y[(x,y);K]$ для любой точки $(x,y) \in \aleph(K)$ следуют из формул (11.5)–(11.8).

Условие 2. Пусть для некоторой точки $(x_0,y_0) \in \aleph(K)$ найдётся точка $(u,v) \in K$ такая, что $(u,v) \overset{Par}{\succ} F[(x_0,y_0);K] = (x_*,y_*)$.

Если $u > x_*$ и $v > y_*$, то $w = (x_* - x_0)(y_* - y_0) < (u - x_0)(v - y_0)$. Это неравенство противоречит допущению, что w есть максимальное значение целевой функции в задаче (11.5).

Пусть, например,

$$u > x_* \text{ и } v = y_*. \tag{11.9}$$

Если $w = w(x_0,y_0) > 0$, то $x_0 < x_* = F_x[(x_0,y_0);K]$ и $y_0 < y_* = F_y[(x_0,y_0);K]$. Отсюда получим, что $u > x_* > x_0$ и $v = y_* > y_0$. Следовательно, $w = (x_* - x_0)(y_* - y_0) < (u - x_0)(v - y_0)$. Это неравенство противоречит допущению, что w есть максимальное значение целевой функции в задаче (11.5).

Пусть $w = 0$. Тогда точка (x_*,y_*) определяется одной из формул (11.6) или (11.7). Если $x_* \ge x_0$, $y_* = y_0$, то первое неравенство в (11.9) противоречит определению точки (x_*,y_*) формулой (11.6). Пусть $x_* = x_0$ и $y_* > y_0$. Тогда из (11.9) следует неравенство $0 = (x_* - x_0)(y_* - y_0) < (u - x_0)(v - y_0)$, которое противоречит допущению, что $w = 0$ есть максимальное значение целевой функции в задаче (11.5).

Условие 3. Пусть область K_1 получается из области K с помощью линейного преобразования (11.2) и задаётся формулой (11.3). Тогда точка $F[(\alpha_1 x + \beta_1;\alpha_2 y + \beta_2);K_1]$ является решением задачи

$$w_1 = \max(u_1 - \alpha_1 x - \beta_1)(v_1 - \alpha_2 y - \beta_2);(u_1,v_1) \in$$
$$\in K_1, u_1 \ge \alpha_1 x + \beta_1,\ v_1 \ge \alpha_2 y + \beta_2. \tag{11.10}$$

Подставляя сюда $u_1 = \alpha_1 u + \beta_1$, $v_1 = \alpha_2 v + \beta_2$, получим следующую задачу:

$$w_1 = \max(\alpha_1(u - x)\alpha_2(v - y)); \quad (u,v) \in K,\ \alpha_1 u \ge \alpha_1 x,\ \alpha_2 v \ge \alpha_2 y.$$

Отсюда, учитывая, что числа $\alpha_i > 0$, будем иметь

$$\frac{w_1}{\alpha_1\alpha_2} = \max((u-x)(v-y)); (u,v) \in K,\ u \geq x,\ v \geq y.$$

Следовательно, $\frac{w_1}{\alpha_1\alpha_2} = w = w(x,y)$. Поэтому, если $w > 0$, то задача (11.5) имеет единственное решение. Следовательно, единственное решение имеет и задача (11.10) и выполнены равенства (11.4).

Если $w = 0$, то $w_1 = 0$. Пусть, например, максимальное значение в задаче (11.10) достигается при $u_1 = \alpha_1 x + \beta_1$. Тогда в задаче (11.5) максимальное значение достигается при $u = x$. Из формулы (11.6) имеем, что

$$F_x^{(1)}[(\alpha_1 x + \beta_1;\alpha_2 y + \beta_2);K_1] = \alpha_1 x + \beta_1 = \alpha_1 F_x[(x,y);K] + \beta_1,$$

$$\begin{aligned} F_y^{(1)}[(\alpha_1 x + \beta_1;\alpha_2 y + \beta_2);K_1] &= \max\ \{f\colon f \geq \alpha_2 y + \beta_2,(\alpha_1 x + \beta_1;f) \in K_1\} = \\ &= \max\{\alpha_1 z + \beta_1 : \alpha_1 z + \beta_1 \geq \alpha_2 y + \beta_2,(x;z) \in K\} = \\ &= \alpha_1 \max\{z : z \geq y,(x;z) \in K\} + \beta_1 = \\ &= \alpha_2 F_y[(x,y);K] + \beta_2. \end{aligned}$$

Условие 4. Пусть множество K симметрично относительно биссектрисы первого координатного угла. Тогда и множество $\aleph(K)$ является симметричным относительно этой биссектрисы. Для точки $(t,t) \in \aleph(K)$ задача (11.5) имеет вид

$$w = \max(u-t)(v-t);\ (u,v) \in K,\ u \geq t,\ v \geq t.$$

Допустим, что $w = (u_0 - t)(v_0 - t)$ для некоторой точки $(u_0,v_0) \in K$, $u_0 \geq t$, $v_0 \geq t$. Рассмотрим точку (f,f), где $f = 0{,}5u_0 + 0{,}5v_0$. Тогда из выпуклости множества K следует, что точка $(f,f) \in K$ и $f \geq t$. Далее,

$$(f-t)(f-t) = (f-t)^2 = 0{,}25((u_0 - t) + (v_0 - t))^2 \geq (u_0 - t)(v_0 - t) = w.$$

Знака строгого неравенства здесь быть не может. Равенство же выполняется тогда и только тогда, когда $(u_0 - t) = (v_0 - t) \Leftrightarrow u_0 = v_0$. Таким образом, выполнено равенство $F_x[(t,t);K] = F_y[(t,t);K]$ для любого $t \in R$.

Условие 5. Пусть выпуклый компакт $K_* \subset K$ и для некоторой точки $(x,y) \in \aleph(K_*)$ выполнено условие $F[(x,y);K] \in K_*$. Это значит, что решение (u_0,v_0) задачи (11.5) лежит во множестве $K_* \subset K$. Следовательно, эта точка будет являться решением задачи (11.5) и при условии $(u,v) \in K_*$. Стало быть, требуемое равенство $F[(x,y);K_*] = F[(x,y);K]$ выполнено.

Докажем теперь *единственность арбитражного решения Нэша*. Пусть имеется функцией L, которая каждому выпуклому компакту $K \subset R^2$ и каждой точке $(x,y) \in \aleph(K)$ ставит в соответствие единственную точку $L[(x,y);K] \in K$. Покажем, что если она удовлетворяет условиям 1–5, то она совпадает с функцией $F[(x,y);K]$, определяемой формулами (11.5)–(11.8).

Зафиксируем точку $(x_0,y_0) \in \aleph(K)$ и обозначим

$$u_0 = F_x[(x_0,y_0);K],\ v_0 = F_y[(x_0,y_0);K];$$
$$u^0 = L_x[(x_0,y_0);K],\ v^0 = L_y[(x_0,y_0);K]. \tag{11.11}$$

Рассмотрим вначале случай, когда оптимальное значение целевой функции в задаче (11.5) $w(x_0,y_0) = 0$. Разберём различные случаи, которые следуют из формул (11.6) и (11.7).

Пусть $x_0 = u_0$, $y_0 = v_0$. Тогда из условия 1, применённого для функции $L[(x,y);K]$, получим, что $u_0 = x_0 \le u^0$, $v_0 = y_0 \le v^0$. Если хотя бы в одном из этих неравенств стоит знак строгого неравенства, то получим противоречие с условием 2, применённым к функции $F[(x,y);K]$. Следовательно, в рассматриваемом случае $u_0 = u^0$, $v_0 = v^0$.

Пусть, например, $x_0 = u_0$, $y_0 < v_0$. Тогда из условия 1, применённого для функции $L[(x,y);K]$, получим, что $u_0 = x_0 \le u^0$, $y_0 \le v^0$. Если $v_0 < v^0$, то получим противоречие с условием 2, применённым к функции $F[(x,y);K]$. Следовательно, $x_0 = u_0 \le u^0$, $y_0 \le v^0 \le v_0$. Нужно рассмотреть случай, когда в одном из этих неравенств стоит знак строгого неравенства. Тогда, если $u_0 = u^0$, то $v^0 < v_0$. Получим противоречие с условием 2, применённым к функции $L[(x,y);K]$. Итак, $x_0 = u_0 < u^0$, $y_0 \le v^0 \le v_0$, $y_0 < v_0$.

Рассмотрим точку $(u^+,v^+) \in K$, где $u^+ = 0{,}5u_0 + 0{,}5u^0$, $v^+ = 0{,}5v_0 + 0{,}5v^0$. Тогда $u^+ > 0{,}5x_0 + 0{,}5x_0 = x_0$, $v^+ > 0{,}5y_0 + 0{,}5y_0 = y_0$. Следовательно, $(u^+ - x_0)(v^+ - y_0) > 0$. Это неравенство противоречит тому, что в рассматриваемом случае оптимальное значение целевой функции в задаче (11.5) равно нулю.

Случай $x_0 < u_0$, $y_0 = v_0$ рассматривается аналогично.

Рассмотрим теперь пример, когда оптимальное значение целевой функции в задаче (11.5) $w(x_0,y_0) > 0$. В этом случае $x_0 < u_0$, $y_0 < v_0$. Покажем, что

$$(x - u_0)(v_0 - y_0) + (y - v_0)(u_0 - x_0) \le 0 \text{ для всех точек } (x,y) \in K. \tag{11.12}$$

Возьмём любую точку $(x,y) \in K$ и любое число $0 < \lambda < 1$. Тогда любая точка $(x_\lambda,y_\lambda) \in K$, где $x_\lambda = u_0 + \lambda(x - u_0)$, $y_\lambda = v_0 + \lambda(y - v_0)$. Имеем $(u_0 - x_0)(v_0 - y_0) \ge (x_\lambda - x_0)(y_\lambda - y_0) = (u_0 - x_0)(v_0 - y_0) + \lambda[(x - u_0)(v_0 - y_0) + (y - v_0)(u_0 - x_0)] + \lambda^2(x - u_0)(y - v_0)$. Отсюда получим, что $(x - u_0)(v_0 - y_0) + (y - v_0)(u_0 - x_0)] + \lambda(x - u_0)(y - v_0) \le 0$.

Устремляя число $\lambda \to 0$, получим неравенство (11.12).

Из неравенства (11.12) следует, что полуплоскость

$$G = \{(x,y) \in R^2 \colon (x - u_0)(v_0 - y_0) + (y - v_0)(u_0 - x_0) \le 0\} \tag{11.13}$$

содержит компакт K. Далее, существует число $a > 2$ такое, что компакт K содержится в прямоугольнике $|x - x_0| \le a(u_0 - x_0)$, $|y - y_0| \le a(v_0 - y_0)$. Таким образом, $K \subset K_+$, где

$$K_+ = \{(x,y) \in R^2: (x - u_0)(v_0 - y_0) + (y - v_0)(u_0 - x_0) \le 0;$$
$$|x - x_0| \le a(u_0 - x_0), |y - y_0| \le a(v_0 - y_0)\}.$$

Построим линейное преобразование

$$x_1 = \frac{x - x_0}{u_0 - x_0},\ y_1 = \frac{y - y_0}{v_0 - y_0} \Rightarrow x = x_0 + x_1(u_0 - x_0),\ y = y_0 + y_1(v_0 - y_0). \quad (11.14)$$

При этом преобразовании выражение $(x - u_0)(v_0 - y_0) + (y - v_0)(u_0 - x_0) = (u_0 - x_0)(x_1 - 1)(v_0 - y_0) + (v_0 - y_0)(y_1 - 1)(u_0 - x_0) = (u_0 - x_0)(v_0 - y_0)(x_1 + y_1 - 2)$. Следовательно, при преобразовании (11.14) множество K_+ переходит во множество $K^+ = \{(x_1,y_1) \in R^2: x_1 + y_1 \le 2;\ |x_1| \le a,\ |y_1| \le a\}$. Далее, при преобразовании (11.14) точка (x_0,y_0) переходит в точку (0,0), а точка (u_0,v_0) — в точку (1,1).

Компакт K^+ является симметричным относительно биссектрисы первого координатного угла. Поэтому из условия 5 получим равенство $L_x^{(1)}[(0,0);K^+] = L_y^{(1)}[(0,0);K^+]$. Из условия 2 следует, что $L_x^{(1)}[(0,0);K^+] = 1$, $L_y^{(1)}[(0,0);K^+] = 1$.

С помощью преобразования (11.14) вернёмся к переменным (x,y). Из условия 3 получим

$$L_x[(x_0,y_0);K_+] = (u_0 - x_0)L_x^{(1)}[(0,0);K^+] + x_0 = (u_0 - x_0)1 + x_0 = u_0,$$
$$L_y[(x_0,y_0);K_+] = (v_0 - y_0)L_y^{(1)}[(0,0);K^+] + y_0 = (v_0 - y_0)1 + y_0 = v_0.$$

Отсюда и из условия 5 получим, что

$$L_x[(x_0,y_0);K] = L_x[(x_0,y_0);K_+] = u_0 = F_x[(x_0,y_0);K],$$
$$L_y[(x_0,y_0);K] = L_y[(x_0,y_0);K_+] = v_0 = F_y[(x_0,y_0);K].$$

Замечание 3. Из условия 2 следует, что для любой точки $(x,y) \in \aleph(K)$ арбитражное решение Нэша (11.8) является максимальной по Парето точкой множества K.

Пример 1. Рассмотрим пример 4 из параграфа 8.

Построим арбитражное решение Нэша. На рис. 11.2 изображены множества D и $\aleph(D)$. Множество $\aleph(D)$ лежит ниже ломаной $ABCF$.

Максимальными по Парето точками множества D являются точки отрезка BC, координаты которых задаются соотношениями $b = 4 - a$, $1 \le a \le 3$. На отрезке BC функция $(u - x)(v - y) = -u^2 + (4 - y + x)u - (4 - y)x$. Поэтому задача (11.5) принимает вид

$$f(u) = -u^2 + (4 - y + x)u \to \max,\ 1 \le u \le 3,\ u \ge x,\ u \le 4 - y. \quad (11.15)$$

Максимальное значение функции $f(u)$ достигается в точке

$$u_* = \frac{4 - y + x}{2}. \quad (11.16)$$

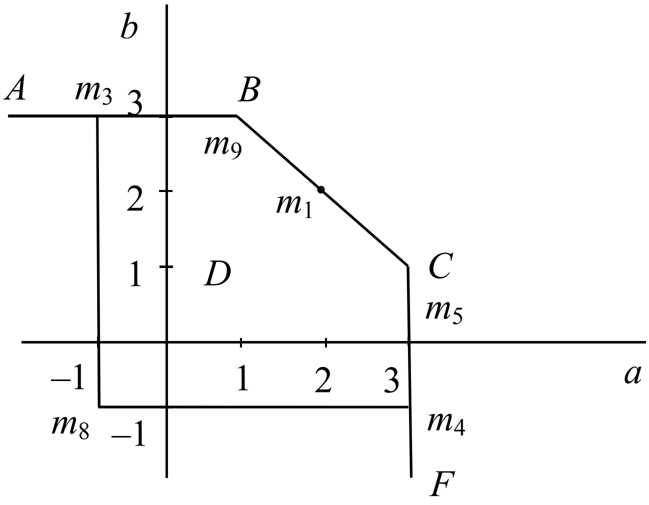

Рис. 11.2

Отметим, что для любой точки (x,y) $\aleph$ $\in(D)$ выполнено неравенство $x + y \leq 4$. Поэтому

$$(x,y) \in \aleph(D) \Rightarrow x \leq u_* = \left(\frac{4-y+x}{2}\right)_* \leq 4-y. \qquad (11.18)$$

Случай 1. Пусть $1 \leq u_* \leq 3$. Согласно формуле (11.16), это условие выполнено для тех точек $(x,y) \in \aleph(D)$, у которых $|\, x - y \,| \leq 2$. В этом случае точка u_* удовлетворяет ограничениям в задаче (11.15). Поэтому решением этой задачи будет точка u_*. Далее, $v_* = 4 - u_*$. Таким образом,

$$(x,y) \in \aleph(D),\ \left|x-y\right| \leq 2 \Rightarrow F_x[(x,y);D] =$$

$$= \frac{4-y+x}{2},\ F_y[(x,y);D] = \frac{4+y-x}{2}.$$

Отметим, что $v_* - u_* = x - y$. Поэтому при построении для точки (x,y) арбитражного решения Нэша нужно провести прямую $a - b = x - y$ до пересечения её с прямой $a + b = 4$. Точка пересечения будет являться максимальной по Нэшу точкой для исходной точки (x,y).

Задача 1. Разобрать оставшиеся случаи.

12. Многошаговые позиционные игры с полной информацией

Рассмотрение позиционных игр с полной информацией и с конечным числом шагов начнём с примера.

Пример 1. Рассмотрим следующую игру. На первом ходу первый игрок выбирает одно из чисел $x \in \{1,2\}$. На втором ходу второй игрок выбирает одно из чисел $y \in \{1,2\}$. На третьем ходу первый игрок выбирает одно из чисел $z \in \{1,2\}$. После этого второй игрок платит первому сумму, равную $M(x,y,z)$, где $M(2,1,1) = 5$; $M(1,1,2) = -1$; $M(2,1,2) = 2$; $M(1,1,1) = -2$; $M(1,2,1) = 3$; $M(2,2,1) = 2$; $M(1,2,2) = -4$; $M(2,2,2) = 6$.

Проведём формализацию задачи. Построим дерево игры (см. рис. 12.1).

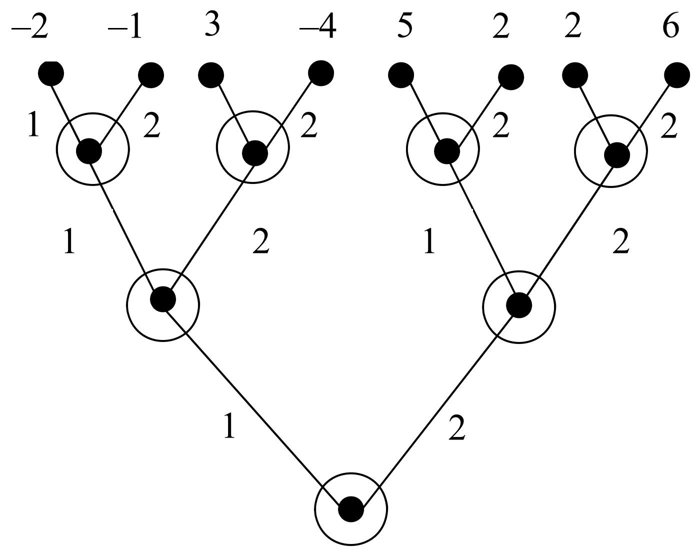

Рис. 12.1

В нижней вершине ход делает первый игрок. В следующих двух вершинах ход принадлежит второму игроку. В последующих четырёх вершинах ход делает первый игрок. В конечных восьми вершинах указана величина выигрыша первого игрока, если в результате выборов игроков будет реализована эта конечная вершина.

Чертёж, подобный рис. 12.1, называется *связанным графом*. Граф игры, изображённый на рис. 12.1, является деревом. Граф в игре должен являться деревом, чтобы в концевых вершинах был однозначно определён выигрыш первого игрока, поскольку в дереве каждая конечная вершина однозначно определяет путь, соединяющий её с началом.

Рассмотрим *игры с полной информацией.*

Пример 2. Рассмотрим игру из примера 1. Считаем, что при выборе числа $y \in \{1,2\}$ второй игрок знает, какое число x на первом ходу выбрал первый игрок. Геометрически это означает, что второй игрок знает, в какой из двух вершин графа находится точка после выбора первого игрока. Далее, при выборе числа $z \in \{1,2\}$ на третьем ходу первый игрок помнит свой выбор x и знает выбор, сделанный вторым игроком. Геометрически это означает, что первый игрок знает, в какой из четырёх вершин графа находится точка после выбора, сделанного вторым игроком.

Стратегией второго игрока назовём функцию f: $\{1,2\} \to \{1,2\}$. Например, $f(1) = 2, f(2) = 1$. При такой стратегии второй игрок берёт число $y = 2$, если первый игрок возьмёт $x = 1$. Если же первый игрок возьмёт $x = 2$, то второй игрок берёт число $y = 1$. Отметим, что у второго игрока имеется $2^2 = 4$ возможных стратегий. Выпишем их: $f(1) = 1, f(2) = 1; f(1) = 1, f(2) = 2; f(1) = 2, f(2) = 1; f(1) = 2, f(2) = 2.$

При определении стратегии первого игрока мы должны указать правила, согласно которым он должен выбирать число x на первом ходу и число z на третьем. На первом ходу первый игрок выбирает $x \in \{1,2\}$. Формально это можно записать с помощью функции φ: $\{0\} \to \{1,2\}$, то есть $\varphi(0) = 1$ или $\varphi(0) = 2$. На третьем ходу стратегия первого игрока должна указывать, что ему брать в каждой из четырёх точек множества $W = \{(1;1),(1;2),(2;1),(2;2)\}$. Следовательно, нужно указать функцию ψ: $W \to \{1,2\}$. Стратегией первого игрока является пара функций $g = (\varphi;\psi)$.

В результате выбранных стратегий реализуется конкретная конечная вершина графа игры. Пусть, например, $\varphi(0) = 1$, $\psi(w) = 1$ при любом $w \in W$, а $f(1) = 1, f(2) = 1$. Тогда реализуется конечная вершина, выигрыш первого игрока в которой равен –2 (см. рис. 12.2). Таким образом, значение функции выигрыша первого игрока на этих стратегиях $N(g,f) = -2$.

Вычислим число стратегий у первого игрока. Имеем, что $\varphi(0) = 1$ или $\varphi(0) = 2$. Далее, число элементов у множества W равно четырём. Следовательно, число возможных функций ψ: $W \to \{1,2\}$ равно $2^4 = 16$. Умножим это число на 2 (за счёт функций φ) и получим, что число возможных стратегий первого игрока равно 32. Можно записать матрицу игры $A = \{a_{ij}\}$, $i = \overline{1,32}$; $j = \overline{1,4}$ и искать её седловую точку.

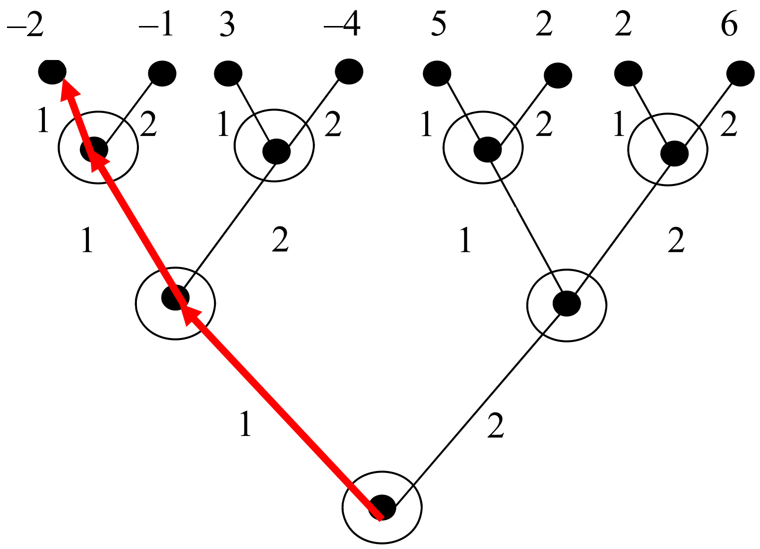

Рис. 12.2

В соответствии с общим подходом пара стратегий (g_0,f_0) называется *седловой точкой* в рассматриваемой игре, если для любых стратегий g и f выполнено неравенство

$$N(g,f_0) \le N(g_0,f_0) \le N(g_0,f). \qquad (12.1)$$

Покажем, что пара стратегий $g_0 = \{\varphi(0) = 2;\ \psi(2;1) = 1,\ \psi(2;2) = 2,\ \psi(1;1) = 1,\ \psi(1;2)$ — любые допустимые значения$\}$, $f_0 = \{f(1) = 1;\ f(2) = 1\}$ является седловой точкой. Имеем, что $N(g_0,f_0) = 5$ (см. рис. 12.3).

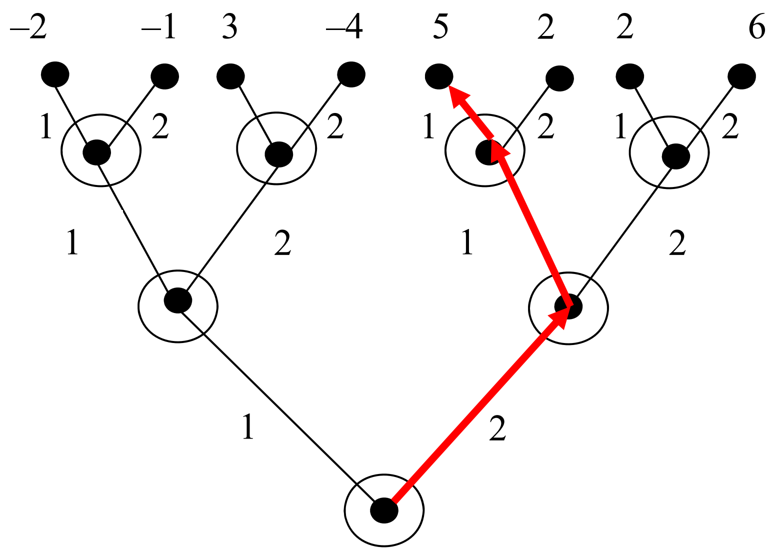

Рис. 12.3

Возьмём стратегию $f \ne f_0$. Пусть $f(2) = 2$. Тогда $N(g_0,f) = 6 > 5 = N(g_0,f_0)$. Если $f(2) = 1$, то $N(g_0,f) = 5$.

Возьмём стратегию первого игрока $g \ne g_0$. Если $\varphi(0) = 1$, то $N(g,f_0)$ может принимать одно из значений $\{-2;-1;3;-4\}$, каждое из которых меньше пяти. Пусть $\varphi(0) = 2$ и $\psi(2;1) = 2$. Тогда $N(g,f_0) = 2 < 5$.

Пример 3. Пусть модель игры представлена на рис. 12.4.

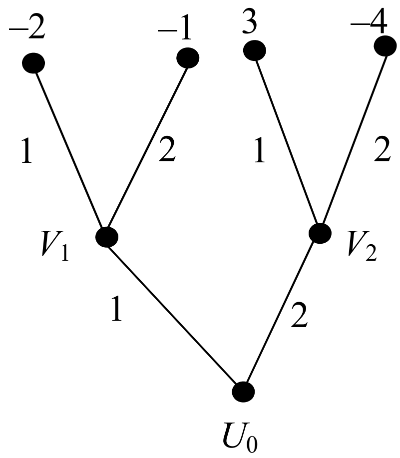

Рис. 12.4

Стратегией второго игрока является функция f: $\{V_1;V_2\} \to \{1;2\}$. Стратегией первого игрока является функция g: $\{U_0\} \to \{1;2\}$. Таким образом, у первого игрока две стратегии, а у второго — четыре. Матрица игры приведена в табл. 12.1.

Таблица 12.1

Матрица выигрыша

Стратегии	$f(V_1) = 1$, $f(V_2) = 1$	$f(V_1) = 1$, $f(V_2) = 2$	$f(V_1) = 2$, $f(V_2) = 1$	$f(V_1) = 2$, $f(V_2) = 2$
$g(U_0) = 1$,	–2	–2	–1	–1
$g(U_0) = 2$	3	–4	–3	–4

Покажем, что в рассмотренной игре существует седловая точка в чистых стратегиях. В самом деле, $\min\limits_{0\le j\le 4}\max\limits_{0\le i\le 2} a_{ij} = -2$ и $\max\limits_{0\le i\le 2}\min\limits_{0\le j\le 4} a_{ij} =$

$= -2 a_{ij} = -2$.

Формализация игр с полной информацией. Считаем, что задано множество X и его разбиение на непустые подмножества

$$X = X_0 \cup X_1 \cup X_2 \cup \ldots \cup X_n, \quad X_i \cap X_j = \varnothing \text{ при } i \ne j. \qquad (12.2)$$

Задано многозначное отображение $T : \bigcup\limits_{i=1}^{n} X_i \to X$ и функция f_i: $X \to R$, $i = \overline{1, n}$.

Правило игры. Игра начинается из начальной позиции $x \in X$. Если $x \in X_i$, $i = \overline{1, n}$, то ход делает i-й игрок. Он выбирает точку $x_1 \in T(x)$. Если выбранная точка $x_1 \in X_j$, то ход делает j-й игрок и так далее. Если какой-то игрок выберет точку $x_k \in X_0$, игра останавливается. Чтобы исключить случай «зацикливания» игры, требуем, чтобы $T(X_i) \cap X_i = \varnothing$ для любого $i = \overline{1, n}$. Это значит, что игрок не может сам себе «подпасовывать».

Замечание 1. На рис. 12.5 множество $X = X_0 \cup X_1 \cup X_2$. Правило перехода указывается стрелкой. Видим, что $T(X_2) \cap X_2 \neq \varnothing$.

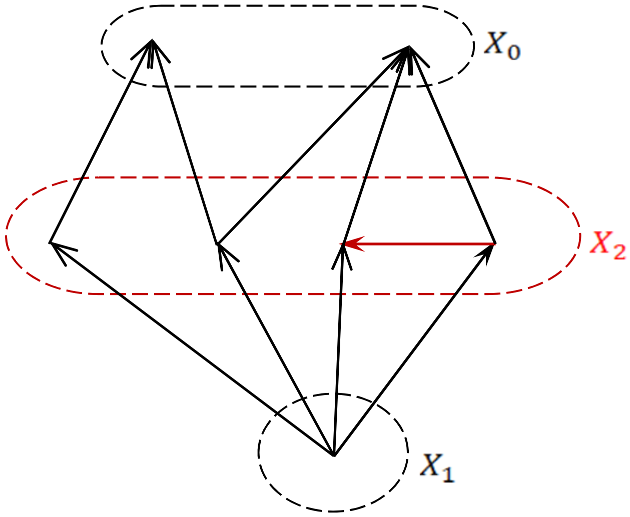

Рис. 12.5

Определение 1. Стратегией i-го игрока называется функция g_i: $X_i \to X$ такая, что $g_i(x) \in T(x)$ для любого $x \in X_i$.

Пусть выбраны стратегии g_i, $i = \overline{1, n}$. Тогда, если игра начинается из начального состояния $x_0 \in X$, выбранный набор стратегий полностью определяет партию. Множество пройденных позиций (партия, траектория) обозначим $S(x_0; g_1, \ldots, g_n)$.

Игроки разделены на две группы. Первую группу обозначим N^+, а вторую — N^-. Положим

$$\begin{aligned} F_i(x_0; g_1, \ldots, g_n) &= \sup_{z \in S(x_0; g_1, \ldots, g_n)} f_i(z), i \in N^+; \\ F_i(x_0; g_1, \ldots, g_n) &= \inf_{z \in S(x_0; g_1, \ldots, g_n)} f_i(z),\ i \in N^-. \end{aligned} \tag{12.3}$$

Цель каждого i-го игрока заключается в максимизации $F_i(x_0; g_1, \ldots, g_n)$.

Пример 4. Пусть множество $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, x_9, x_{10}, x_{11}, x_{12}\}$, $X_0 = \{x_9, x_{10}, x_{11}, x_{12}\}$, $X_1 = \{x_1, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8\}$, $X_2 = \{x_2, x_3\}$. Правила перехода приведены в табл. 12.2.

Таблица 12.2

Матрица переходов

Стратегии	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8
$T(x)$	$\{x_2, x_3\}$	$\{x_4, x_5\}$	$\{x_6, x_7, x_8\}$	$\{x_9\}$	$\{x_9\}$	$\{x_{10}\}$	$\{x_{10}, x_{11}\}$	$\{x_{12}\}$
$g_1(x)$	x_2	–	–	x_9	x_9	x_{10}	x_{10}	x_{12}
$g_2(x)$	–	x_5	x_7	–	–	–	–	–

Тогда траектория $S(x_0;g_1,g_2) = \{x_1,x_2,x_5,x_9\}$ (см. рис. 12.6).

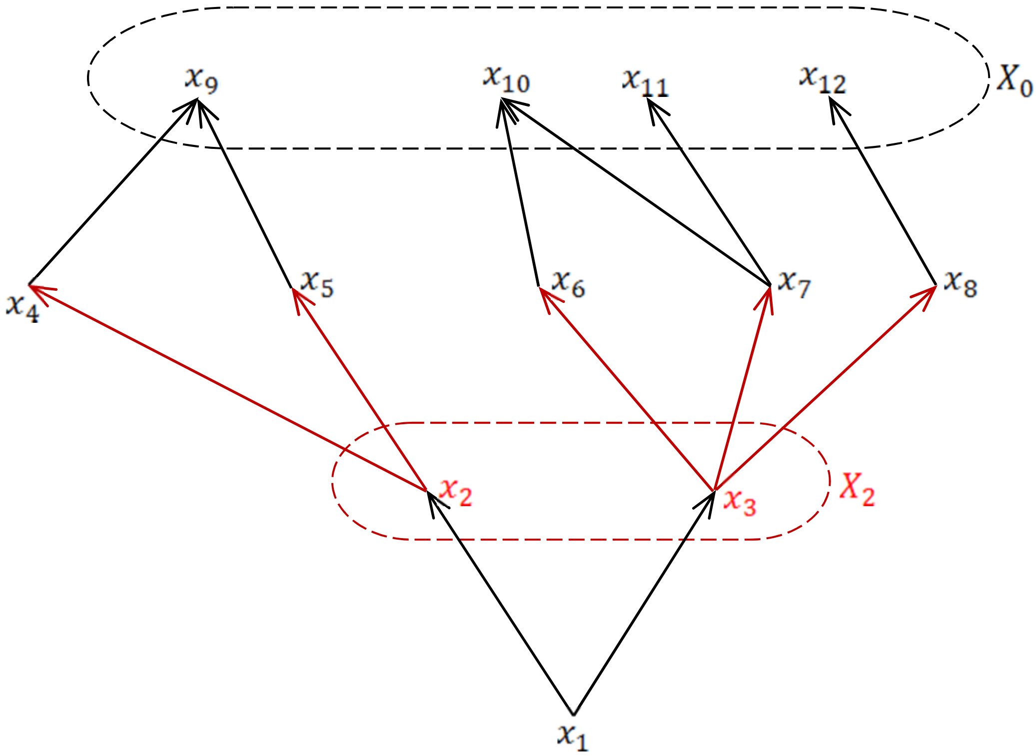

Рис. 12.6

В табл. 12.3 заданы значения функции

Таблица 12.3

Значения функции выигрыша

Стратегии	x_9	x_{10}	x_{11}	x_{12}
$q(x)$	1	0	–1	–3

Цель первого игрока заключается в том, чтобы в момент окончания игры значение функции $q(x)$ было как можно большим. Цель второго игрока заключается в минимизации в момент окончания игры этого значения $q(x)$.

Положим $f_1(x) = -10$, $f_2(x) = -10$ при $x \in X/X_0 = \{x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6,x_7,x_8\}$ и $f_1(x) = q(x)$, $f_2(x) = -q(x)$ при $x \in X_0$. Тогда для любых стратегий g_1 и g_2 выполнено

$$F_1(x_0;g_1,g_2) = \sup_{z\in S(x_0;g_1,g_2)} f_1(z) = q(x)\big|_{x\in X_0};$$

$$F_2(x_0;g_1,g_2) = \inf_{z\in S(x_0;g_1,g_2)} f_2(z) = -q(x)\big|_{x\in X_0}.$$

Следовательно, оба игрока максимизируют свои функции $F_1(x_0;g_1,g_2)$ и $F_2(x_0;g_1,g_2)$. В этой игре $N^+ = \{1\}$, $N^- = \{1\}$.

Определение 2. Набор стратегий $g_i^0, i=\overline{1,n}$ называется *точкой равновесия Нэша по отношению к начальной позиции* x_0, если для любого $i=\overline{1,n}$ и для любой стратегии g_i i-го игрока выполнены неравенства

$$F_i(x_0;g_1^0,\ldots,g_{i-1}^0,g_i,g_{i+1}^0,\ldots,g_n^0) \le F_i(x_0;g_1^0,\ldots,g_{i-1}^0,g_i^0,g_{i+1}^0,\ldots,g_n^0). \quad (12.4)$$

Определение 3. Набор стратегий g_i^0, $i=\overline{1,n}$ называется *точкой абсолютного равновесия Нэша*, если неравенства (12.4) выполнены для любой начальной позиции x_0, для любого $i=\overline{1,n}$ и для любой стратегии g_i i-го игрока.

Определение 4. Последовательность точек $x_0 \in X$, $x_1 \in T(x_0)$, $x_2 \in \in T(x_1)$, …, $x_k \in T(x_{k-1})$ и $x_k \in X_0$ называется *партией*.

Теорема 1 (Цермело — фон Нейман [2. С. 27–28]). Пусть выполнены следующие условия:

1) каждое из множеств $\{f_i(x)\colon x \in X\} \subset R$, $i=\overline{1,n}$ состоит из конечного числа точек;

2) существует целое положительное число m такое, что в любой партии $\{x_0,x_1,\ldots,x_k$ и $x_k \in X_0\}$ количество точек не превосходит этого числа m.

Тогда игра имеет точку абсолютного равновесия.

Доказательство. Доопределим $T(x) = x$ для любой точки $x \in X_0$. Для каждого множества $Y \subset X$ положим

$$T^{-1}(Y) = \{y \in X\colon T(y) \subset Y\}. \quad (12.5)$$

Рассмотрим множества

$$C_0 = X_0,\ C_1 = T^{-1}(C_0)\cup C_0,\ldots,C_m = T^{-1}(C_{m-1})\cup C_{m-1}. \quad (12.6)$$

Построенные множества удовлетворяют следующим свойствам:

$$C_0 \subset C_1 \subset \ldots \subset C_m; \quad (12.7)$$

$$T(C_k) \subset C_k \text{ для всех } k=\overline{1,m}; \quad (12.8)$$

$$C_m = X. \quad (12.9)$$

Включения в (12.7) очевидны. Доказательство включения (12.8) проведём индукцией по числу k. Пусть $k = 1$. Возьмём точку $x \in T(C_1)$. Тогда $x \in T(y)$ при некотором $y \in C_1$. Отсюда и из (12.6) следует, что возможны два случая.

Случай 1. Пусть $y \in C_0$. Тогда $x \in T(y) = y \in C_0 \subset C_1$.

Случай 2. Пусть $y \in T^{-1}(C_0)$. Тогда из формулы (12.5) следует, что $x \in T(y) \subset C_0 \subset C_1$.

Допустим, что включение (12.6) доказано для некоторого номера k. Проверим его для номера $k + 1$. Пусть точка $x \in T(C_{k+1})$. Тогда $x \in T(y)$ при некотором $y \in C_{k+1} = T^{-1}(C_k)\cup C_k$. Отсюда следует, что возможны два случая.

Случай 1. Пусть $y \in C_k$. Тогда $x \in T(y) \subset T(C_k) \subset C_k \subset C_{k+1}$.

Случай 2. Пусть $y \in T^{-1}(C_k)$. Тогда из формулы (12.5) следует, что $x \in T(y) \subset C_k \subset C_{k+1}$.

Докажем включение $X \subset C_m$, из которого будет следовать равенство (12.9). Допустим, что существует точка $y_0 \in X$ и $y_0 \notin C_m = T^{-1}(C_{m-1}) \cup C_{m-1}$. Следовательно, $y_0 \notin T^{-1}(C_{m-1})$. Из последнего соотношения, применяя формулу (12.5), получим, что $T(y_0) \not\subset C_{m-1}$. Стало быть, существует точка $y_1 \in T(y_0)$ и $y_1 \notin C_{m-1}$. Продолжая этот процесс дальше, построим последовательность точек $y_0 \notin C_m$; $y_1 \in T(y_0)$ и $y_1 \notin C_{m-1}$; $y_2 \in T(y_1)$ и $y_2 \notin C_{m-1}$; …; $y_m \in T(y_{m-1})$ и $y_m \notin C_0$. Следовательно, построили партию с количеством точек y_i большим, чем m.

Из включения (12.8) следует, что игру можно рассматривать на каждом множестве C_k. Если $g_1, \ldots, g_i, \ldots, g_n$ — стратегии игроков на X, то сужение их на множество C_k будем обозначать $g_1^{(k)}, \ldots, g_i^{(k)}, \ldots, g_n^{(k)}$.

В силу этого замечания будем строить стратегии последовательно, переходя от множества C_k к множеству C_{k+1}.

Для точки $x \in C_0$ положим, что $g_i^{(0)}(x) = x$ для любого $i = \overline{1, n}$. Тогда $g_i^{(0)0}(x) = x$. Следовательно, $F_i(x; g_1^{(0)0}, \ldots, g_n^{(0)0}) = f_i(x)$, $i \in N^+$ и $i \in N^-$.

Строим стратегии на множестве C_1. Если точка $x \in C_0$, то полагаем $g_i^{(1)0}(x) = g_i^{(0)0}(x)$. Пусть точка $x \in C_1/C_0$. Тогда $x \in X_i$ при некотором номере i. Ход делает i-й игрок. Он выбирает точку $y \in T(x)$ так, чтобы

$$\max(f_i(x); f_i(y)) = \max_{z \in T(x)} \max(f_i(x); f_i(z)) \text{ при } i \in N^+,$$

$$\min(f_i(x); f_i(y)) = \max_{z \in T(x)} \min(f_i(x); f_i(z)) \text{ при } i \in N^-. \tag{12.10}$$

Положим $g_i^{(1)0}(x) = y$. Тогда

$$F_i(x; g_1^{(1)0}, \ldots, g_i^{(1)0}, \ldots, g_n^{(1)0}) = \begin{cases} \max(f_i(x); f_i(y)) \text{ при } i \in N^+, \\ \min(f_i(x); f_i(y)) \text{ при } i \in N^-. \end{cases}$$

Покажем, что построенная стратегия является точкой абсолютного равновесия на множестве C_1. Если точка $x \in C_0$, то это очевидно. Пусть точка $x \in C_1/C_0$. Тогда $x \in X_j$ при некотором j. Ход делает j-й игрок. Зафиксируем любой номер i. Выясним, как меняется функция $F_i(x; g_1^{(1)}, \ldots, g_i^{(1)}, \ldots, g_n^{(1)})$.

Пусть $i = j$. Ход делает i-й игрок. Пусть он выбрал некоторую стратегию $g_i^{(1)}$. Тогда $g_i^{(1)}(x) = z \in T(x) \in C_0$. Согласно построенной стратегии имеем, что $g_i^{(1)0}(x) = y \in T(x) \in C_0$. Из формул (12.10) следует, что

$$F_i(x; g_1^{(1)0}, \ldots, g_{i-1}^{(1)0}, g_i^{(1)}, g_{i+1}^{(1)0}, \ldots, g_n^{(1)0}) =$$

$$=\begin{cases}\max(f_i(x);f_i(z)) \text{ при } i\in N^+, \\ \min(f_i(x);f_i(z)) \text{ при } i\in N^-\end{cases} \le \begin{cases}\max(f_i(x);f_i(y)) \text{ при } i\in N^+, \\ \min(f_i(x);f_i(y)) \text{ при } i\in N^-\end{cases} =$$

$$= F_i(x;g_1^{(1)0},\dots,g_i^{(1)0},\dots,g_n^{(1)0}).$$

Пусть $i\neq j$. Тогда любая стратеги $g_i^{(1)} = g_i^{(0)}$, которая каждой точке $x\in C_0$ ставит в соответствие точку $g_i^{(0)}(x) = x$. Поэтому

$$F_j(x;g_1^{(1)0},\dots,g_i^{(1)},\dots,g_n^{(1)0}) = F_j(x;g_1^{(1)0},\dots,g_j^{(1)0},\dots,g_n^{(1)0}).$$

Предположим, что на множестве C_k построены стратегии $g_1^{(k)0},\dots,$ $g_i^{(k)0},\dots,g_n^{(k)0}$, которые являются точкой абсолютного равновесия Нэша на множестве C_k. Построим на множестве C_{k+1}. Возьмём точку $x\in C_{k+1}$.

Пусть точка $x\in C_k$. Тогда $x\in X_i$ при некотором i. Полагаем $g_i^{(k+1)0}(x) = g_i^{(k)0}(x)$.

Рассмотрим случай, когда точка $x\in C_{k+1} / C_k$. Тогда $x\in X_i$ при некотором i. Возьмём точку $g_i^{(k+1)0}(x) = y\in T(x)$ так, чтобы

$$\begin{gathered}\max(f_i(x);F_i(y;g_1^{(k)0},\dots,g_j^{(k)0},\dots,g_n^{(k)0}))= \\ =\max_{z\in T(x)}\max(f_i(x);F_i(z;g_1^{(k)0},\dots,g_i^{(k)0},\dots,g_n^{(k)0})) \text{ при } i\in N^+, \\ \min(f_i(x);F_i(y;g_1^{(k)0},\dots,g_i^{(k)0},\dots,g_n^{(k)0}))= \\ =\max_{z\in T(x)}\min(f_i(x);F_i(z;g_1^{(k)0},\dots,g_i^{(k)0},\dots,g_n^{(k)0})) \text{ при } i\in N^-.\end{gathered} \tag{12.11}$$

Отметим, что для любой стратегии $g_1^{(k+1)},\dots,g_i^{(k+1)},\dots,g_n^{(k+1)}$, которая на первом шаге переводит точку $x\in C_{k+1}$ в некоторую точку z, выполнено равенство

$$F_i(x;g_1^{(k+1)},\dots,g_i^{(k+1)},\dots,g_n^{(k+1)}) = \\ =\begin{cases}\max(f_i(x);F_i(z;g_1^{(k)},\dots,g_n^{(k)}) \text{ при } i\in N^+, \\ \min(f_i(x);F_i(z;g_1^{(k)},\dots,g_n^{(k)}) \text{ при } i\in N^-.\end{cases} \tag{12.12}$$

Здесь $g_1^{(k)},\dots,g_n^{(k)}$ сужение стратегии $g_1^{(k+1)},\dots,g_n^{(k+1)}$ на множество C_k.

Покажем, что построенная стратегия $g_1^{(k+1)0},\dots,g_n^{(k+1)0}$ является точкой абсолютного равновесия Нэша на множестве C_{k+1}. Это значит, что для любой точки $x\in C_{k+1}$ выполнено неравенство

$$F_i(x;g_1^{(k+1)0},\dots,g_i^{(k+1)},\dots,g_n^{(k+1)0}) \le F_i(x;g_1^{(k+1)0},\dots,g_i^{(k+1)0},\dots,g_n^{(k+1)0}) \tag{12.13}$$

для любой стратегии $g_i^{(k+1)}$ i-го игрока.

Если точка $x\in C_k$, то неравенство (12.13) следует из равенств $g_i^{(k+1)0}(x) = g_i^{(k)0}(x)$ для всех $i=\overline{1,n}$ и из индукционного предположения.

Пусть точка $x\in C_{k+1} / C_k$. Тогда $x\in X_j$ при некотором j. Ход делает j-й игрок. Зафиксируем любой номер i. Выясним, как меняется функция $F_i(x;g_1^{(k+1)},\dots,g_i^{(k+1)},\dots,g_n^{(k+1)})$.

Пусть $i = j$. Ход делает i-й игрок. Пусть он выбрал некоторую стратегию $g_i^{(k+1)}$. Тогда $g_i^{(k+1)}(x) = z \in T(x) \in C_k$. Согласно стратегии $g_i^{(k+1)0}(x) = y \in T(x) \in C_k$. Из формул (12.11) следует, что

$$F_i(x; g_1^{(k+1)0}, \dots, g_i^{(k+1)}, \dots, g_n^{(k+1)0}) =$$

$$= \begin{cases} \max(f_i(x); F_i(z; g_1^{(k)0}, ..., g_i^{(k)}, ..., g_n^{(k)0}) \text{ при } i \in N^+, \\ \min(f_i(x); F_i(z; g_1^{(k)0}, ..., g_i^{(k)}, ..., g_n^{(k)0}) \text{ при } i \in N^- \end{cases} \le$$

$$\le \left| \begin{matrix} \text{из предположения индукции и из} \\ \text{неравенства } \; b \le c \Rightarrow \min(a;b) \le \min(a;c) \end{matrix} \right| \le$$

$$\le \begin{cases} \max(f_i(x); F_i(z; g_1^{(k)0}, ..., g_i^{(k)0}, ..., g_n^{(k)0}) \text{ при } i \in N^+, \\ \min(f_i(x); F_i(z; g_1^{(k)0}, ..., g_i^{(k)0}, ..., g_n^{(k)0}) \text{ при } i \in N^- \end{cases} \le$$

$$\le \begin{cases} \max(f_i(x); F_i(y; g_1^{(k)0}, ..., g_i^{(k)0}, ..., g_n^{(k)0}) \text{ при } i \in N^+, \\ \min(f_i(x); F_i(y; g_1^{(k)0}, ..., g_i^{(k)0}, ..., g_n^{(k)0}) \text{ при } i \in N^- \end{cases} =$$

$$= F_i(x; g_1^{(k+1)0}, \dots, g_i^{(k+1)0}, \dots, g_n^{(k+1)0}).$$

Пусть $i \ne j$. Тогда для любой стратегии $g_i^{(k+1)}$ i-го игрока выполнено

$$F_j(x; g_1^{(k+1)0}, \dots, g_j^{(k+1)}, \dots, g_n^{(k+1)0}) = \left| \text{ согласно (12) } \right| =$$

$$= \begin{cases} \max(f_j(x); F_j(y; g_1^{(k)0}, ..., g_j^{(k)}, ..., g_n^{(k)0}) \text{ при } j \in N^+, \\ \min(f_j(x); F_j(y; g_1^{(k)0}, ..., g_j^{(k)}, ..., g_n^{(k)0}) \text{ при } j \in N^- \end{cases} \le$$

$$\le \left| \begin{matrix} \text{из предположения индукции} \\ \text{и из неравенства } b \le c \Rightarrow \min(a;b) \le \min(a;c) \end{matrix} \right| \le$$

$$\le \begin{cases} \max(f_j(x); F_j(y; g_1^{(k)0}, ..., g_j^{(k)0}, ..., g_n^{(k)0}) \text{ при } j \in N^+, \\ \min(f_j(x); F_j(y; g_1^{(k)0}, ..., g_j^{(k)0}, ..., g_n^{(k)0}) \text{ при } j \in N^- \end{cases} =$$

$$= F_j(x; g_1^{(k+1)0}, \dots, g_j^{(k+1)0}, \dots, g_n^{(k+1)0}).$$

Теорема доказана.

Задача 1. Доказать эту теорему, когда для любого игрока плата задаётся формулой

$$F_i(x_0; g_1, \dots, g_n) = \sum_{z \in S(x_0; g_1, ..., g_n)} f_i(z), \quad i = \overline{1, n}.$$

Отметим, что сумма в этой формуле конечна, поскольку число ходов и, следовательно, число пройденных позиций является конечным числом.

Определение 5. Игра называется *игрой с нулевой суммой*, если

$$\sum_{i=1}^{n} f_i(x) = 0 \text{ в каждой точке } x \in X.$$

Рассмотрим игру двух игроков с нулевой суммой. Тогда $f_1(x) = f(x)$, $f_1(x) = -f(x)$, $N^+ = \{1\}$, $N^- = \{2\}$. Зафиксируем две стратегии g_1 и g_2. Тогда

$$F_1(x; g_1, g_2) = \max_{z \in S(x; g_1, g_2)} f_1(z) = \max_{z \in S(x; g_1, g_2)} f(x);$$

$$F_2(x; g_1, g_2) = \min_{z \in S(x; g_1, g_2)} f_2(z) = \min_{z \in S(x; g_1, g_2)} (-f(x)) =$$

$$= -\max_{z \in S(x; g_1, g_2)} f(x) = -F_1(x; g_1, g_2).$$

Обозначим $F_1(x;g_1,g_2) = F(x;g_1,g_2)$. Неравенства (12.4) принимают вид

$$F(x;g_1,g_2^0) \le F(x;g_1^0,g_2^0), \ (-F_i(x;g_1^0,g_2)) \le (-F_i(x;g_1^0,g_2^0)).$$

Поэтому $F(x;g_1,g_2^0) \le F(x;g_1^0,g_2^0) \le F_i(x;g_1^0,g_2)$.

Из доказанной теоремы следует, что в игре двух игроков с нулевой суммой с конечным числом шагов и с полной информацией всегда существует седловая точка. Если множество X состоит из конечного числа точек, то число стратегий у каждого из двух игроков конечно. Занумеруем стратегии первого игрока буквой i, а стратегии второго игрока — буквой j. Плату обозначим a_{ij}. Получим матричную игру, которая имеет седловую точку в чистых стратегиях.

Пример 5. Задана матрица

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 1 & 4 \\ 2 & 7 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 3 & 3 \\ 4 & 0 & 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

I ход. Первый игрок выбирает либо (1-ю и 2-ю) строки, либо (3-ю и 4-ю) строки и сообщает о своём выборе второму игроку.

II ход. Второй игрок выбирает либо (1-й и 2-й) столбцы, либо (3-й и 4-й) столбцы и сообщает о своём выборе первому игроку.

III ход. Первый игрок выбирает конкретную строку из ранее выбранных и сообщает о своём выборе второму игроку.

IV ход. Второй игрок выбирает конкретный столбец из ранее выбранных.

Пусть в итоге получилась i-я строка и j-й столбец. Выигрыш первого равен числу a_{ij}. Граф игры изображён на рис. 12.7.

Приведём решение в этой игре. На первом ходу первый игрок выбирает 3-ю и 4-ю строки. На втором ходу второй игрок выбирает

1-й и 2-й столбцы. На третьем ходу первый игрок выбирает третью строку. На четвёртом ходу второй игрок выбирает 2-й столбец.

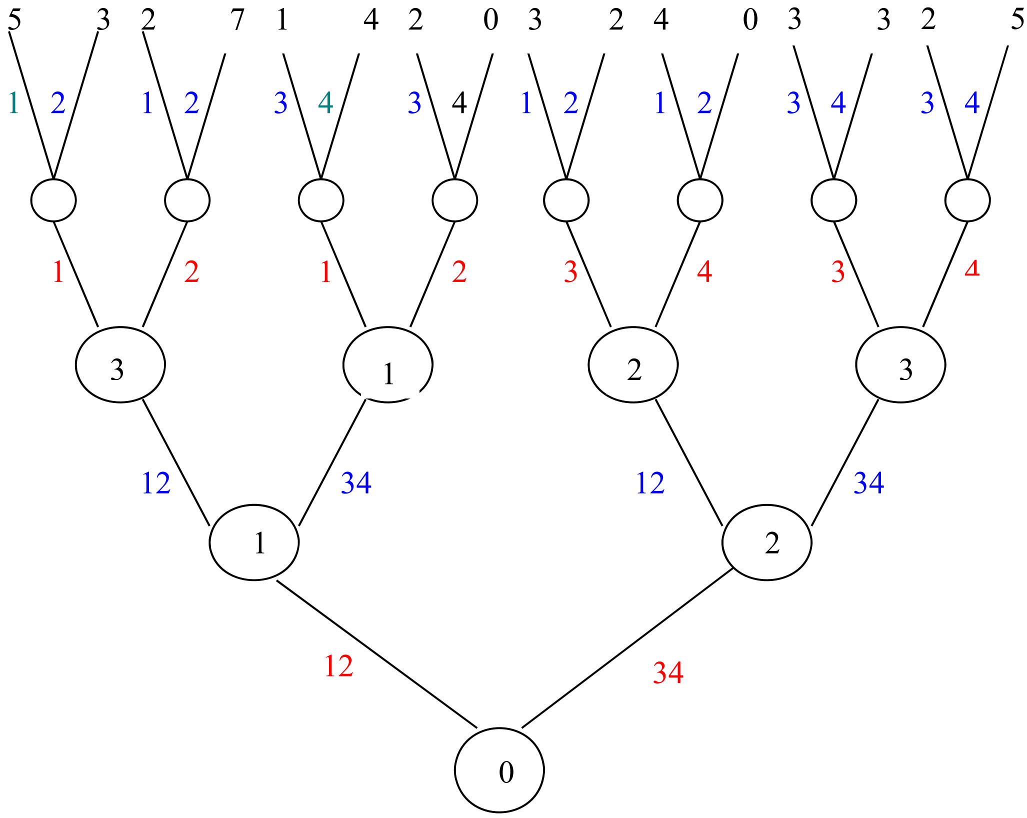

Рис. 12.7

Решение этой игры приведено на рис. 12.8.

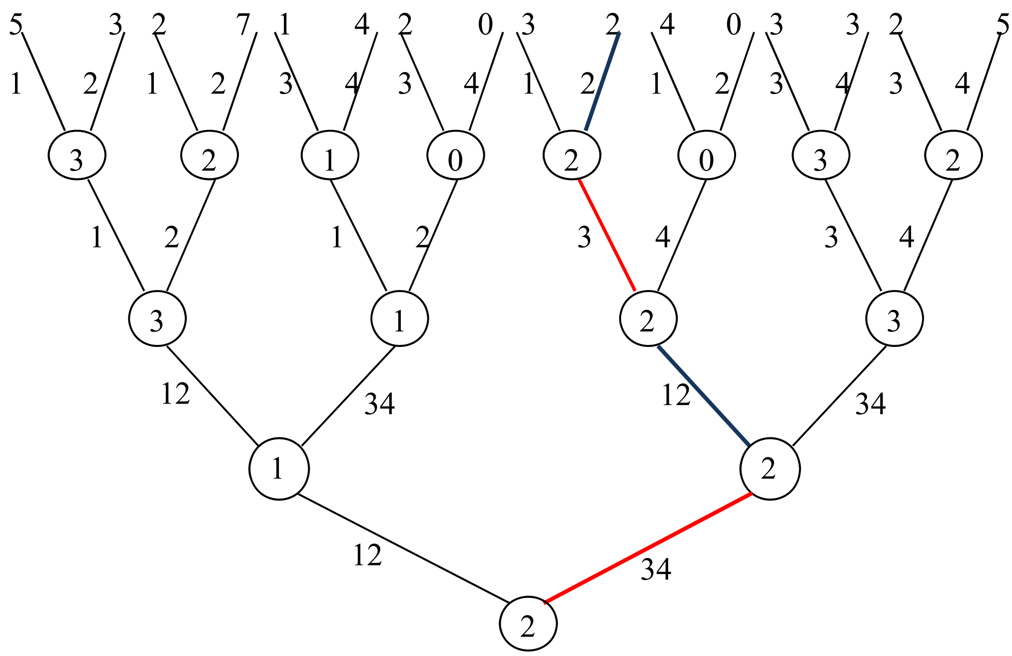

Рис. 12.8

13. Позиционные игры с неполной информацией и конечным числом шагов

Рассмотрение позиционных игр с неполной информацией и конечным числом шагов ограничим примерами.

Пример 1. Рассмотрим пример 3 из параграфа 12. В нём модель игры представлена на рис. 13.1.

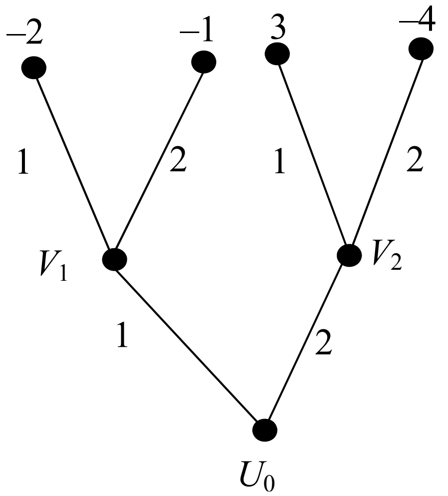

Рис. 13.1

Рассмотрим случай, когда второй игрок не знает о выборе, сделанным первым игроком. В этом случае модель игры представлена на рис. 13.2.

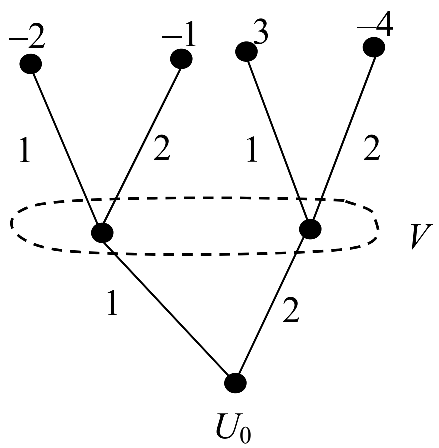

Рис. 13.2

Второй игрок, делая свой ход, не знает, в какой из вершин, принадлежащих множеству V, он находится. Приходим к понятию *информационного множества.*

Стратегией второго игрока является функция f: $\{V\} \to \{1;2\}$. Стратегией первого игрока является функция g: $\{U_0\} \to \{1;2\}$. Таким образом, у первого и у второго игроков имеется по две стратегии. Матрица игры представлена в табл. 13.1. Покажем, что седловой точки в чистых стратегиях в рассмотренной игре не существует. В самом деле, $\min\limits_{0\le j\le 2}\max\limits_{0\le i\le 2} a_{ij} = -1$, $\max\limits_{0\le i\le 2}\min\limits_{0\le j\le 2} a_{ij} = -2$.

Таблица 13.1

Матрица выигрыша для примера 1

Стратегия	$f(V) = 1$	$f(V) = 2$
$g(U_0) = 1$	–2	–1
$g(U_0) = 2$	3	–4

Пример 2. Рассмотрим игру из примера 1 параграфа 12 в следующей модификации. Петя выбирает число $x \in \{1;2\}$. Вася, зная x, выбирает число $y \in \{1;2\}$. Приходит Маша, жена Пети, и, не зная, как они играли до этого, выбирает число $z \in \{1;2\}$. После этого Вася платит им сумму, равную $M(x,y,z)$. Так как Петя и Маша составляют одну семью с одним бюджетом, то цель у них одна. Следовательно, они составляют одного игрока. Модель игры изображена на рис. 13.3.

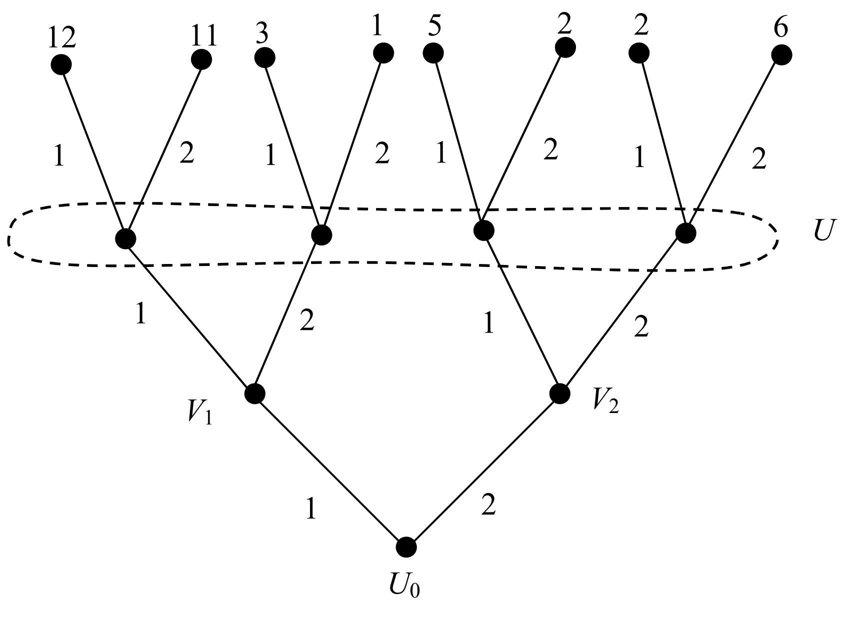

Рис. 13.3

На третьем ходу первый игрок не знает, в какой из вершин, принадлежащих множеству U_1, он находится. Опять приходим к понятию информационного множества.

Стратегией второго игрока является функция f: $\{V_1;V_2\} \to \{1;2\}$. Первый игрок не различает вершины, находящиеся во множестве U_1. Поэтому стратегией первого игрока является функция g: $\{U_0;U_1\} \to \{1;2\}$.

Таким образом, каждый из игроков имеет по четыре стратегии. Матрица игры представлена в табл. 13.2.

Замечание 1. Уменьшение информации привело к уменьшению размерности матрицы игры, что является проявлением следующего принципа: *чем меньше знаешь, тем легче на что-то решиться.*

Покажем, что седловой точки в чистых стратегиях в рассмотренной игре не существует. В самом деле, $\min\limits_{0\le j\le 4}\max\limits_{0\le i\le 4} a_{ij} = 5$, а $\max\limits_{0\le i\le 4}\min\limits_{0\le j\le 4} a_{ij} = 2$.

Таблица 13.2

Матрица выигрыша для примера 2

Стратегии	$f(V_1) = 1$, $f(V_2) = 1$	$f(V_1) = 1$, $f(V_2) = 2$	$f(V_1) = 2$, $f(V_2) = 1$	$f(V_1) = 2$, $f(V_2) = 2$
$g(U_0) = 1$, $g(U_1) = 1$	–2	–2	3	3
$g(U_0) = 1$, $g(U_1) = 2$	–1	–1	–4	–4
$g(U_0) = 2$, $g(U_1) = 1$	5	2	5	2
$g(U_0) = 2$, $g(U_1) = 2$	2	6	2	6

Пример 3. Рассмотрим изменённую игру из предыдущего примера. На втором ходу второй игрок, не зная x, выбирает $y \in \{1;2\}$. На третьем ходу первый игрок, не зная о выборе второго игрока и не помня x, выбирает число $z \in \{1;2\}$. Модель игры изображена на рис. 13.4.

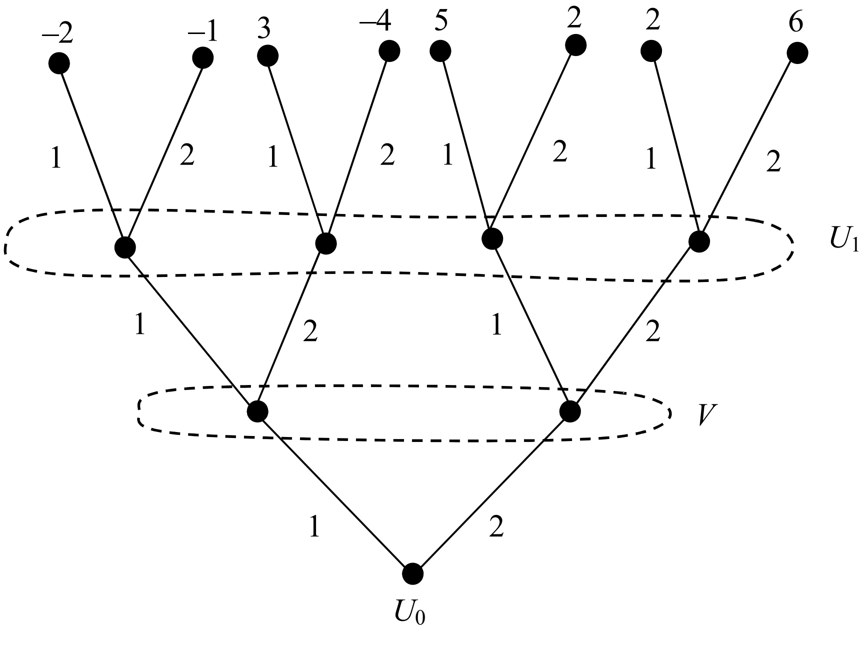

Рис. 13.4

Стратегией второго игрока является функция f: $\{V\} \to \{1;2\}$. Стратегией первого игрока является функция g: $\{U_0;U_1\} \to \{1;2\}$.

Таким образом, каждый из игроков имеет по четыре стратегии. Матрица игры приведена в табл. 13.3.

Таблица 13.3

Матрица выигрыша для примера 3

Стратегии	$f(V) = 1$	$f(V) = 2$
$g(U_0) = 1, g(U_1) = 1$	–2	3
$g(U_0) = 1, g(U_1) = 2$	–1	–4
$g(U_0) = 2, g(U_1) = 1$	5	2
$g(U_0) = 2, g(U_1) = 2$	2	6

Имеем $\min\limits_{0\le j\le 2}\max\limits_{0\le i\le 4} a_{ij} = 5$, а $\max\limits_{0\le i\le 4}\min\limits_{0\le j\le 3} a_{ij} = 2$. Следовательно, седловой точки в чистых стратегиях в этой игре не существует.

Пример 4. На втором ходу второй игрок, не зная x, выбирает $y \in \in \{1;2\}$. На третьем ходу первый игрок, помня x и зная о выборе второго игрока, выбирает число $z \in \{1;2\}$. Модель игры изображена на рис. 13.5. У первого игрока 32 стратегии, а у второго — 2.

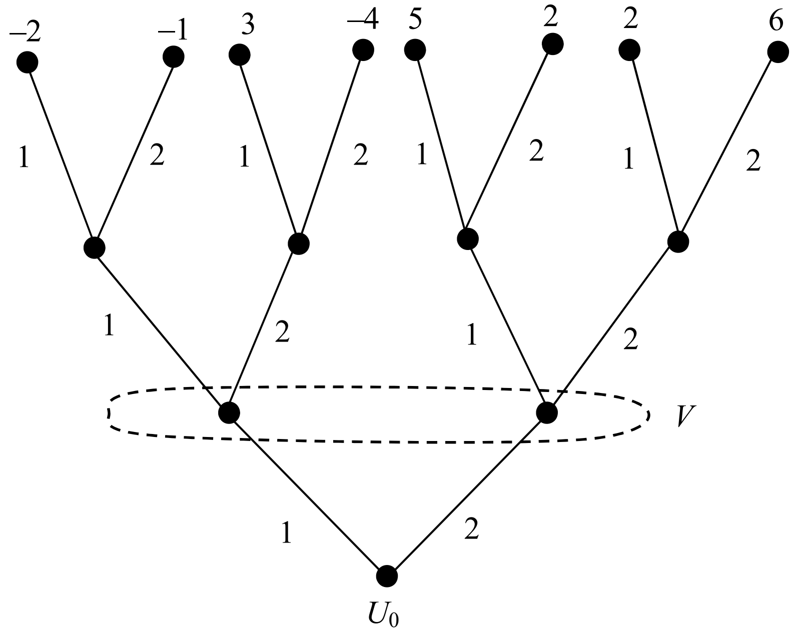

Рис. 13.5

Пример 5. На первом ходу первый игрок выбирает число $x \in \in \{1;2\}$. На втором ходу второй игрок, зная x, выбирает $y \in \{1;2\}$. На третьем ходу первый игрок, помня x, но не зная о выборе второго игрока, выбирает число $z \in \{1;2\}$. Модель игры изображена на рис. 13.6.

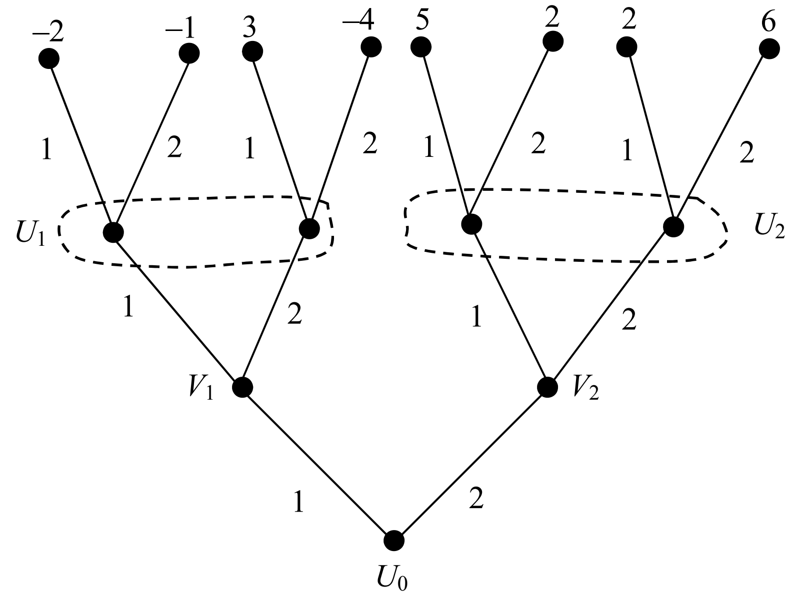

Рис. 13.6

Стратегией второго игрока является функция f: $\{V_1;V_2\} \to \{1;2\}$. *Стратегией первого игрока* является функция g: $\{U_0;U_1;U_2\} \to \{1;2\}$. Таким образом, второй игрок имеет четыре стратегии, а первый — восемь.

Пример 6. В первый ход первый игрок выбирает число $x \in \{1;2\}$. На втором ходу второй игрок, не зная x, выбирает $y \in \{1;2\}$. На третьем ходу первый игрок, зная о выборе второго игрока, но не помня x, выбирает число $z \in \{1;2\}$. Модель игры изображена на рис. 13.7.

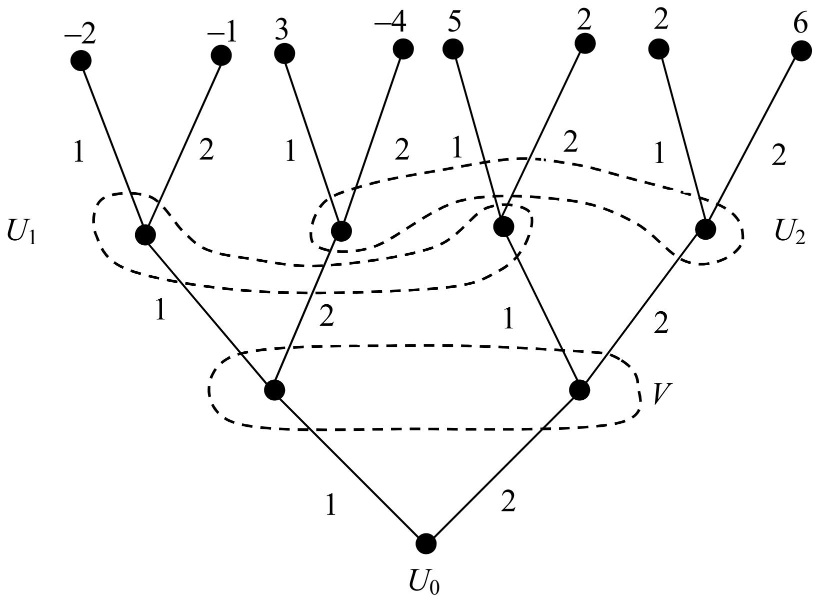

Рис. 13.7

Пример 7. Первый игрок — один человек. Второй игрок — это муж и жена. Все трое сидят в разных комнатах. Вначале судья входит в комнату к первому игроку и предлагает ему выбрать число $x \in \{1;2\}$. Если первый игрок выбрал число $x = 1$, судья идёт к жене и предлагает ей выбрать число $y \in \{1;2\}$. Если же первый игрок выбрал число $x = 2$, то судья идёт к мужу и предлагает ему выбрать число $y \in \{1;2\}$. После того, как выбрано число y, судья идёт к оставшемуся супругу и предлагает ему выбрать число $z \in \{1;2\}$. После этого супруги платят первому игроку сумму $M(x,y,z)$, где $M(1,1,1) = 0$, $M(2,1,1) = 4$, $M(1,1,2) = 2$, $M(2,1,2) = 0$, $M(1,2,1) = 6$, $M(2,2,1) = 5$, $M(1,2,2) = 8$, $M(2,2,2) = 6$. Модель игры изображена на рис. 13.8.

Стратегией второго игрока является функция f: $\{V_1;V_2\} \to \{1;2\}$. Стратегией первого игрока является функция g: $\{U_0\} \to \{1;2\}$. Таким образом, второй игрок имеет четыре стратегии, а первый — две. Матрица игры представлена в табл. 13.4.

Таблица 13.4

Матрица выигрыша для примера 7

Стратегии	$f(V_1) = 1$, $f(V_2) = 1$	$f(V_1) = 1$, $f(V_2) = 2$	$f(V_1) = 2$, $f(V_2) = 1$	$f(V_1) = 2$, $f(V_2) = 2$
$g(U_0) = 1$	0	6	2	8
$g(U_0) = 2$	4	0	5	6

Имеем $\min\limits_{0 \le j \le 4} \max\limits_{0 \le i \le 2} a_{ij} = 4$, а $\max\limits_{0 \le i \le 2} \min\limits_{0 \le j \le 4} a_{ij} = 0$. Следовательно, седловой точки в чистых стратегиях в этой игре не существует.

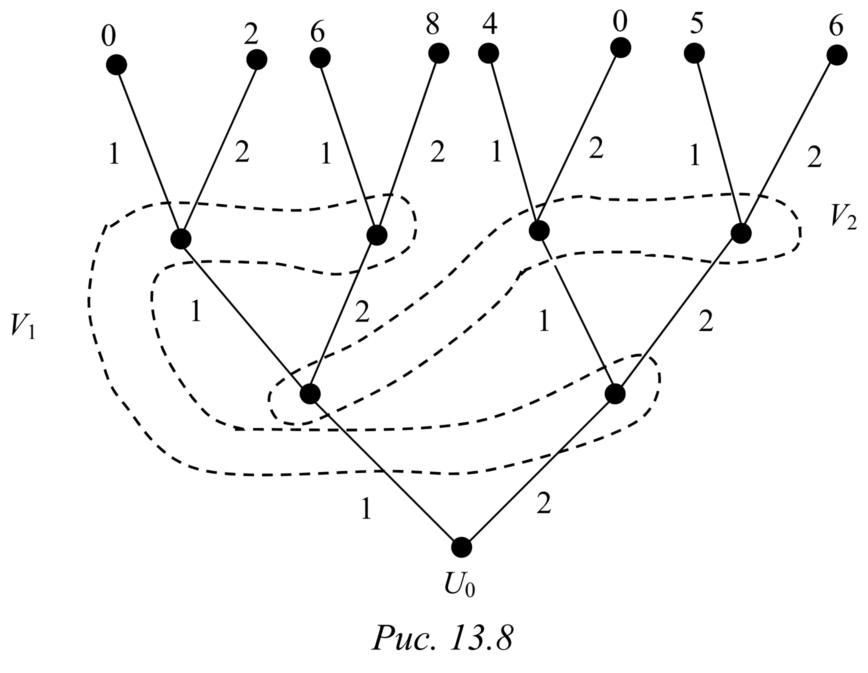

Рис. 13.8

Вычислим оптимальные смешанные стратегии игроков в этом примере. Чтобы найти оптимальную смешанную стратегию $\lambda_1^0 = \lambda_0$, $\lambda_2^0 = 1 - \lambda_0$ первого игрока и значение v_0 цены игры рассмотрим при $0 \le \lambda \le 1$ функции

$$v_1 = 0\lambda + 4(1 - \lambda) = 4(1 - \lambda),\ v_2 = 6\lambda + 0(1 - \lambda) = 6\lambda,$$
$$v_3 = 2\lambda + 5(1 - \lambda) = 5 - 3\lambda,\ v_4 = 8\lambda + 6(1 - \lambda) = 6 + 2\lambda.$$

Графики этих прямых линий, занумерованных соответствующими цифрами, приведены на рис. 13.9.

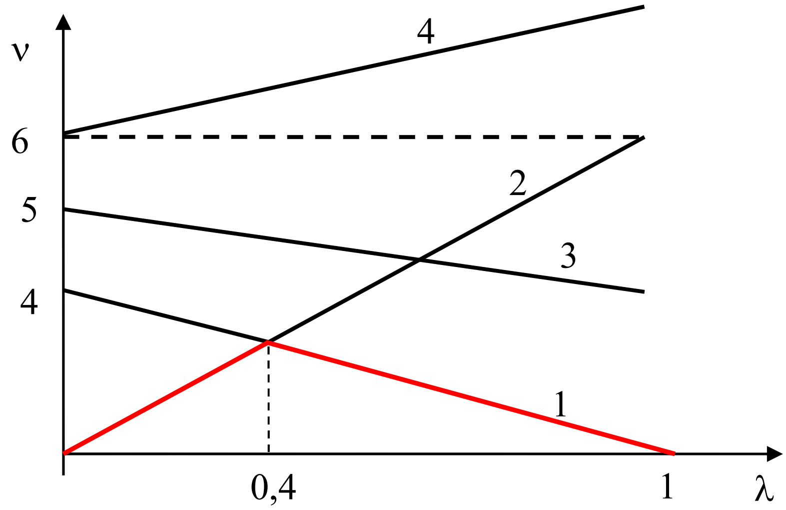

Рис. 13.9

Поскольку $4(1 - \lambda) \le 5 - 3\lambda$ и $4(1 - \lambda) \le 6 + 2\lambda$ при $0 \le \lambda \le 1$, то

$$v(\lambda) = \min(4(1-\lambda);6\lambda;5-3\lambda;6+2\lambda) = \min(4(1-\lambda);6\lambda) =$$

$$= \begin{cases} 4-4\lambda \text{ при } 0 \le \lambda \le 0{,}4, \\ 6\lambda \text{ при } 0{,}4 \le \lambda \le 1. \end{cases}$$

Поэтому $v_0 = \max\limits_{0\le\lambda\le 1} = v(0{,}4) = 2{,}4$, а $\lambda_1^0 = 0{,}4$, $\lambda_2^0 = 0{,}6$.

Чтобы найти оптимальную смешанную стратегию второго игрока, запишем систему уравнений

$$0\mu_1 + 6\mu_2 + 2\mu_3 + 8\mu_4 = 2{,}4;$$
$$4\mu_1 + 0\mu_2 + 5\mu_3 + 6\mu_4 = 2{,}4; \qquad \mu_1 + \mu_2 + \mu_3 + \mu_4 = 1.$$

Решением этой системы являются числа $\mu_1^0 = 0{,}6$, $\mu_2^0 = 0{,}4$, $\mu_3^0 = \mu_4^0 = 0$. Оптимальные смешанные стратегии приведены в табл.13.5.

Таблица 13.5

Оптимальные смешанные стратегии

Стратегии	$f(V_1) = 1$, $f(V_2) = 1$	$f(V_1) = 1$, $f(V_2) = 2$	$f(V_1) = 2$, $f(V_2) = 1$	$f(V_1) = 2$, $f(V_2) = 2$	$g(U_0) = 1$	$g(U_0) = 2$
Вероятность	0,6	0,4	0	0	0,4	0,6

14. Задачи для самостоятельного решения

Пример 1 (модель рынка с двумя производителями товаров). Пусть на рынке какого-то товара зависимость спроса q от цены p (*функция спроса*) является линейной

$$q = b - \frac{b}{a} p, \quad 0 \le p \le a.$$

Имеется два производителя товара. Считаем, что при заданной цене p, сложившейся на рынке, i-й производитель поставляет на рынок количество товара, равного $q_i = p\frac{b}{a}x_i,\ \ x_i \ge 0.$ Тогда совокупное количество товара, выставленного на рынок, равно $q = p\frac{b}{a}(x_1 + x_2).$ Цена p_* формируется из условия равновесия между спросом и предложением:

$$b - \frac{b}{a} p_* = p_* \frac{b}{a}(x_1 + x_2).$$

Отсюда находим, что

$$p_* = \frac{a}{1 + x_1 + x_2}.$$

Прибыль i-го производителя равняется

$$g_i(x_1, x_2) = p_* q_i = p_*^2 \frac{b}{a} x_i = ab f_i(x_1, x_2),\ \ f_i(x_1, x_2) = \frac{x_i}{(1 + x_1 + x_2)^2}.$$

Задача 1.1. Считаем, что имеется орган, который планирует, сколько каждый производитель должен поставить на рынок товара. Это значит, что он выбирает числа $x_i \ge 0$. При этом он хочет, чтобы прибыль у каждого производителя была как можно больше. Получим задачу

$$f_1(x_1, x_2) \to \max, f_2(x_1, x_2) \to \max, x_1 \ge 0, x_2 \ge 0. \qquad (14.1)$$

Необходимо исследовать, существуют ли максимальные по Слейтеру и по Парето точки в задаче (14.1).

Задача 1.2. Зафиксируем число $\lambda > 0$ и рассмотрим задачу

$$f_1(x_1, x_2) + \lambda f_2(x_1, x_2) \to \max, x_1 \ge 0, x_2 \ge 0.$$

Существует ли решение в этой задаче?

Задача 1.3. Считаем, что каждый из производителей самостоятельно выбирает количество поставляемого им на рынок товара, стремясь получить как можно большую прибыль. Получим бескоалиционную игру

$$\Gamma = \left\{ i = \overline{1,2}; [0, +\infty), [0, +\infty); f_1(x_1, x_2), f_2(x_1, x_2) \right\}.$$

Нужно исследовать, существуют ли стратегии $x_1^{(0)} \geq 0, x_2^{(0)} \geq 0$ производителей, которые являются ситуацией равновесия по Нэшу в игре Γ.

Пример 2 (задача о вкладе по двум валютным счетам). Вкладчик, имея сумму денег, равную N р., делит её на две части xN и $(1 - x)N$, $0 \leq x \leq 1$ и кладёт на валютные вклады. Пусть курс i-й валюты по отношению к рублю равен K_i, а процент по вкладу составляет $D_i 100$ % годовых, $i = 1{,}2$. Обозначим через L_i курс i-й валюты по отношению к рублю через год. Через год у вкладчика окажется сумма в рублях, равная

$$N\left(x(1 + D_1)\frac{L_1}{K_1} + (1 - x)(1 + D_2)\frac{L_2}{K_2} \right).$$

Обозначим

$$Q = \frac{1 + D_2}{1 + D_1}, \; y_i = \frac{L_i}{K_i}, \; i = 1{,}2.$$

Цель вкладчика заключается в максимизации итоговой рублёвой суммы денег. Поэтому имеем задачу

$$f(x, y_1, y_2) = xy_1 + Q(1 - x)y_2 \to \max, \; 0 \leq x \leq 1. \qquad (14.2)$$

Задача 2.1. Считая, что $0 < a_i \leq y_i \leq b_i$, $i = 1{,}2$, нужно найти стратегии вкладчика, применяя критерии, рассмотренные в первом параграфе.

Задача 2.2. Считаем, что отношения y_i курсов валют являются случайными величинами с известными математическими ожиданиями $M(y_i) = m_i$ и показателями ковариации $V_{ij} = M((y_i - m_i)(y_j - m_j))$ случайных величин y_1 и y_2. Рассмотрите задачу об оптимальной стратегии вкладчика, используя критерии ожидаемого значения и математического ожидания — дисперсии.

Пример 3 (задача о двух стрелках). Два одинаково метких стрелка делают пять шагов по направлению к мишени. Вероятность поражения мишени на s шаге равна $\frac{s}{5}, s = \overline{0,5}$. Каждый из стрелков имеет по одной пуле в ружье. Один из стрелков (первый игрок) может услышать выстрел другого (второй игрок). Второй игрок не может определить выстрелил ли первый игрок или нет. Вычислим вероятность того, что k-й игрок попадёт в мишень первым.

Случай 1. Пусть первый игрок стреляет на i-м, а второй на j-м шаге, причём $i < j$. Тогда вероятность a_{ij} того, что первый игрок попадёт в мишень раньше второго, равна $\frac{i}{5}$. Вероятность b_{ij} того, что второй игрок поразит мишень раньше первого, равна $\left(1-\frac{i}{5}\right)\frac{j}{5}$. Она является произведением вероятности $\left(1-\frac{i}{5}\right)$ непопадания в мишень первым игроком на вероятность $\frac{j}{5}$ попадания в мишень вторым игроком.

Случай 2. Пусть второй игрок стреляет на j-м шаге, причём первый игрок ещё не стрелял по мишени. Услышав выстрел второго игрока, первый стреляет по мишени на пятом шаге. Тогда вероятность b_{ij} того, что второй игрок попадёт в мишень раньше первого, равна $\frac{j}{5}$. Вероятность a_{ij} того, что первый игрок поразит мишень раньше второго, равна $\left(1-\frac{j}{5}\right)$. Она является вероятностью непопадания в мишень вторым игроком.

Случай 3. Пусть игроки стреляют одновременно, то есть $i = j$. Тогда $a_{ij} = b_{ij} = \frac{i}{5}$. Таким образом,

$$a_{ij} = \frac{i}{5} \text{ при } i \le j,\ a_{ij} = 1-\frac{j}{5} \text{ при } j < i;$$

$$b_{ij} = \left(1-\frac{i}{5}\right)\frac{j}{5} \text{ при } i < j, b_{ij} = \frac{j}{5} \text{ при } j \le i.$$

Задача 3.1. Цель первого игрока заключается в максимизации вероятности a_{ij}. Считая второго игрока помехой, рассмотрите задачу об оптимальной стратегии первого игрока, применяя критерии, представленные в параграфе 1. Рассмотрите аналогичную задачу для второго игрока.

Задача 3.2. Цель первого игрока заключается в максимизации разности вероятностей $a_{ij} - b_{ij}$. Второй игрок эту разность минимизирует. Найдите решение этой матричной игры.

Задача 3.3. Для биматричной игры $(a_{ij};b_{ij})$ постройте арбитражную схему Нэша.

Пример 4 (задача о гонке вооружений [15]). Рассмотрим двух потенциальных противников, на вооружении которых находятся стратегические ракеты. Каждая из сторон считает, что противник предпримет попытку уничтожить его ракеты путём нанесения первого удара. Ни одна из сторон не планирует сама нанести удар первой, однако недоверие между ними велико. Это приводит к тому, что каждая из сторон ценность своих ракет видит не в их количестве, а в надёжности. Надёжность определяется потенциалом ракет, который останется после первого удара противника, ибо этим оставшимся потенциалом сторона может нанести ответный удар по противнику. Если рассчитываемая величина оставшегося потенциала ракет не удовлетворяет сторону, то она увеличивает количество своих ракет. Происходит гонка вооружений.

Пусть у первой стороны имеется x ракет, на каждой из которых находится по n боеголовок. Вторая сторона обладает y ракетами. На каждой её ракете находится по m боеголовок.

В результате разведывательных данных первой стороне известно о каждой ракете противника, в какой области S она находится равновероятно. Найдём вероятность поражения этой ракеты.

Обозначим через u вероятность вывода ракеты первой стороны в заданную точку. После того, как ракета выведена в заданную точку, боеголовки отделяются, разлетаются и взрываются, покрывая взрывом всю область S. Событие, заключающееся в поражении цели противника, состоит из двух событий: 1) вывод ракеты, несущей боеголовки, в заданную расчётную точку; 2) цель находится в зоне поражения, которая создаётся после взрыва боеголовки. Поскольку эти события являются независимыми, то вероятность поражения цели противника одной боеголовкой равна произведению вероятностей этих событий, то есть равна up. Здесь p — вероятность наступления второго события. Она равна

$$p = \frac{\text{Площадь зоны поражения}}{\text{Полощадь зоны } S}.$$

Пусть q — заряд одной боеголовки. Зона поражения является сферой, объём которой пропорционален заряду, то есть $\frac{4}{3}\pi R^3 \sim q$. Отсюда следует, что площадь зоны поражения $\pi R^2 \sim \sqrt[3]{q^2}$. Пусть общий заряд, который несёт одна ракета, равен Q. Тогда $q = \frac{Q}{n}$ и, следовательно, площадь зоны поражения $\pi R^2 \sim \frac{1}{\sqrt[3]{n^2}}$. Стало быть, вероятность поражения цели одной боеголовкой равна $\frac{u}{\sqrt[3]{n^2}}$. Всего у первой стороны nx боеголовок. Эти боеголовки распределены по y целям противника. Стало быть, в среднем на одну цель противника приходится по $\frac{nx}{y}$ боеголовок.

Событие, заключающееся в том, что цель не будет поражена этим количеством боеголовок, состоит из $\frac{nx}{y}$ событий, которые независимы и вероятность наступления каждого из них равна $1-\frac{u}{\sqrt[3]{n^2}}$. Стало быть, вероятность того, что цель не будет поражена, задаётся формулой

$$\left(1-\frac{u}{\sqrt[3]{n^2}}\right)^{\frac{nx}{y}}.$$

Эта вероятность определяет долю оставшихся ракет у второй стороны после нанесения противником первого удара. Стало быть, оставшийся потенциал равен

$$f_2(x,y)=y\left(1-\frac{u}{\sqrt[3]{n^2}}\right)^{\frac{nx}{y}}.$$

Аналогично оставшийся потенциал у первой стороны равен

$$f_1(x,y)=x\left(1-\frac{v}{\sqrt[3]{m^2}}\right)^{\frac{my}{x}}.$$

Здесь через v обозначена вероятность вывода ракеты второй стороны в заданную точку.

Поскольку каждая из сторон стремится максимизировать свой оставшийся потенциал, то получаем игру двух лиц с ненулевой суммой:

$$f_1(x,y)=x\left(1-\frac{v}{\sqrt[3]{m^2}}\right)^{\frac{my}{x}} \to \max,$$

$$f_2(x,y)=y\left(1-\frac{u}{\sqrt[3]{n^2}}\right)^{\frac{nx}{y}} \to \max,\ x\ge 1, y\ge 1.$$

Задача 4.1. Выясните, существует ли у полученной игры точка равновесия по Нэшу.

Пример 5. Задана матрица

$$C = \begin{pmatrix} (5,4) & (3,3) & (1,5) & (2,4) \\ (3,2) & (2,7) & (6,2) & (0,0) \\ (7,3) & (7,2) & (1,3) & (5,3) \\ (2,4) & (7,0) & (6,2) & (4,5) \end{pmatrix}$$

биматричной игры $C = \{(a_{ij}; b_{ij})\}; i,\ j = \overline{1,4}$.

Задача 5.1. Цель первого игрока заключается в максимизации a_{ij}. Считая второго игрока помехой, рассмотрите задачу об оптимальной стратегии первого, применяя критерии, представленные в первом параграфе. Рассмотрите аналогичную задачу для второго игрока.

Задача 5.2. Цель первого игрока заключается в максимизации разности вероятностей $a_{ij} - b_{ij}$. Второй игрок эту разность минимизирует. Найдите решение этой матричной игры.

Задача 5.3. Для биматричной игры $(a_{ij};b_{ij})$ постройте арбитражную схему Нэша.

Задача 6. Для каждой биматричной игры, заданной матрицами

$$C = \begin{pmatrix} (3;4) & (6;3) \\ (4;2) & (3;6) \end{pmatrix};\ C = \begin{pmatrix} (1,2) & (2,1) \\ (4,1) & (0,0) \end{pmatrix};\ C = \begin{pmatrix} (8,3) & (1,4) \\ (4,1) & (3,8) \end{pmatrix},$$

найдите решение по Нэшу.

Список рекомендуемой литературы

1. Ашманов, С. А. Линейное программирование / С. А. Ашманов. М. : Наука, 1981. 304 с.

2. Берж, К. Общая теория игр нескольких лиц / К. Берж. М. : Физматлит, 1961. 128 с.

3. Благодатских, А. И. Сборник задач и упражнений по теории игр : учеб. пособие / А. И. Благодатских, Н. Н. Петров. СПб. : Лань, 2014. 297 с.

4. Васин, А. А. Теория игр и модели математической экономики : учеб. пособие / А. А. Васин, В. В. Морозов. М. : МАКС Пресс, 2005. 272 с.

5. Дюбин, Г. Н. Введение в прикладную теорию игр / Г. Н. Дюбин, В. Г. Суздаль. М. : Наука, 1981. 336 с.

6. Жуковский, В. И. Риск в многокритериальных и конфликтных системах при неопределённости / В. И. Жуковский, Л. В. Жуковская. М. : Едиториал УРСС, 2004. 272 с.

7. Краснов, М. А. Вся высшая математика / М. А. Краснов, А. И. Кисилев, Г. И. Макаренко. М. : Эдиаториал УРСС, 2001. 296 с.

8. Льюис, Р. Д. Игры и решения. Введение и критический обзор / Р. Д. Льюис, Х. Райфа. М. : Иностр. лит., 1961. 643 с.

9. Машкин, Н. А. История Древнего Рима / Н А. Машкин. Л. : Печат. Двор при Совете Министров СССР, 1947. 679 с.

10. Мулен, Э. Кооперативное принятие решений: аксиомы и модели / Э. Мулен. М. : Мир, 1991. 456 с.

11. Петров, Н. Н. Теория игр : учеб. пособие / Н. Н. Петров. Ижевск : Изд-во Удмурт. ун-та, 1997. 196 с.

12. Петросян, Л. А. Теория игр / Л. А. Петросян, Н. А. Зенкевич, Е. А. Семина. М. : Высш. шк., 1998. 205 с.

13. Подиновский, В. В. Парето-оптимальные решения многокритериальных задач / В. В. Подиновский, В. Д. Ногин. М. : Физматлит, 2007. 256 с.

14. Розен, В. В. Математические модели принятия решений в экономике / В. В. Розен. М. : Высш. шк., 2002. 288 с.

15. Саати, Т. Л. Математические модели конфликтных ситуаций / Т. Л. Саати. М. : Совет. радио, 1977. 304 с.

16. Ширяев, А. Н. Вероятность / А. Н. Ширяев. М. : Наука, 1980. 576 с.

Учебное издание

КЛАССИЧЕСКОЕ УНИВЕРСИТЕТСКОЕ ОБРАЗОВАНИЕ

УХОБОТОВ Виктор Иванович

ВВЕДЕНИЕ В ТЕОРИЮ ПРИНЯТИЯ РЕШЕНИЙ ПРИ НЕОПРЕДЕЛЁННОСТЯХ

Учебное пособие

Редактор А. И. Мезяев
Компьютерная вёрстка и дизайн обложки Т. В. Ростуновой

Подписано в печать 17.09.15.
Формат 60 × 84 $^{1}/_{16}$. Бумага офсетная.
Усл. печ. л. 8,1. Уч.-изд. л. 8,1.
Тираж 100 экз. Заказ 76.

ФГБОУ ВПО «Челябинский государственный университет»
454001 Челябинск, ул. Братьев Кашириных, 129

Издательство Челябинского государственного университета
454021 Челябинск, ул. Молодогвардейцев, 57б